

# マルチプルエンヴェロープ方程式を 用いたビームダイナミクス計算

水野 明彦

(公財)高輝度光科学研究センター

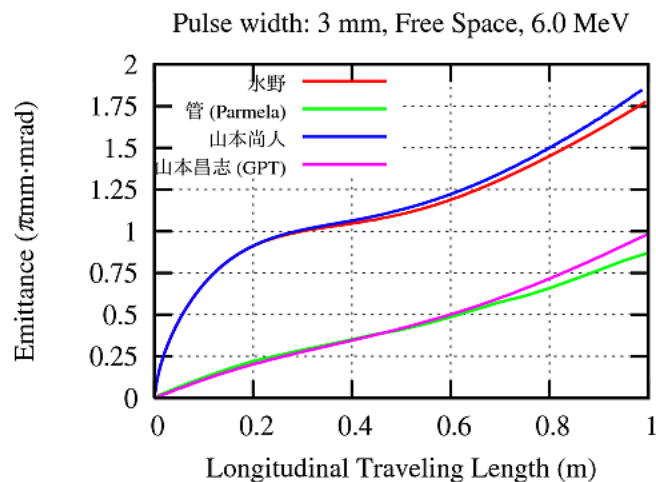
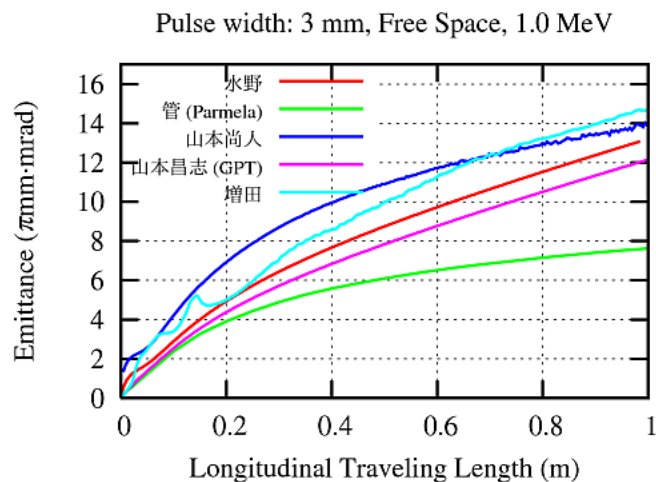
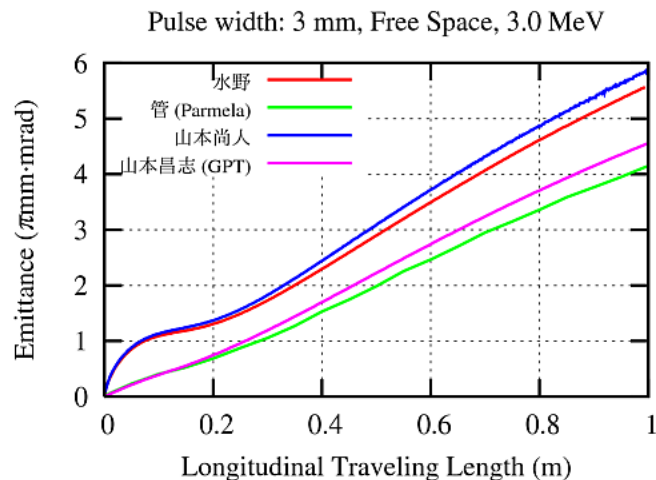
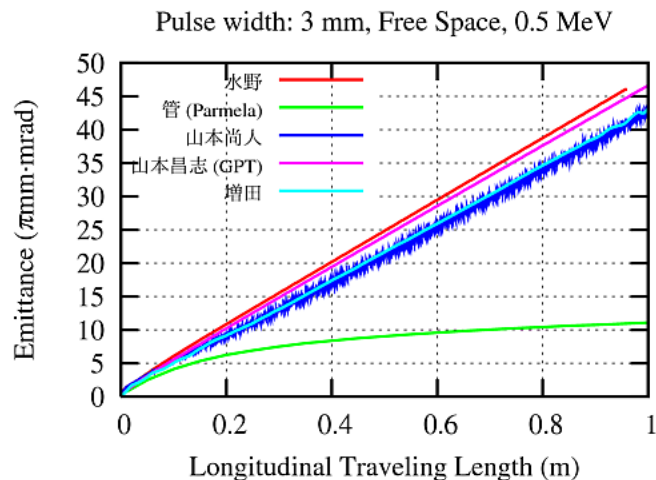
# Contents

1. Multiple Beam Envelope Equationsの概要
2. フリースペースでのビームダイナミクス計算
3. RF電子銃空洞内でのビームダイナミクス計算
4. 実際のelectron injectorのビームダイナミクス計算  
まとめ

# 1. Multiple Beam Envelope Equationsの概要

# Motivation

計算コードによりエミッタンスのバラツキがある。  
真のエミッタンスは計算できないものであろうか？

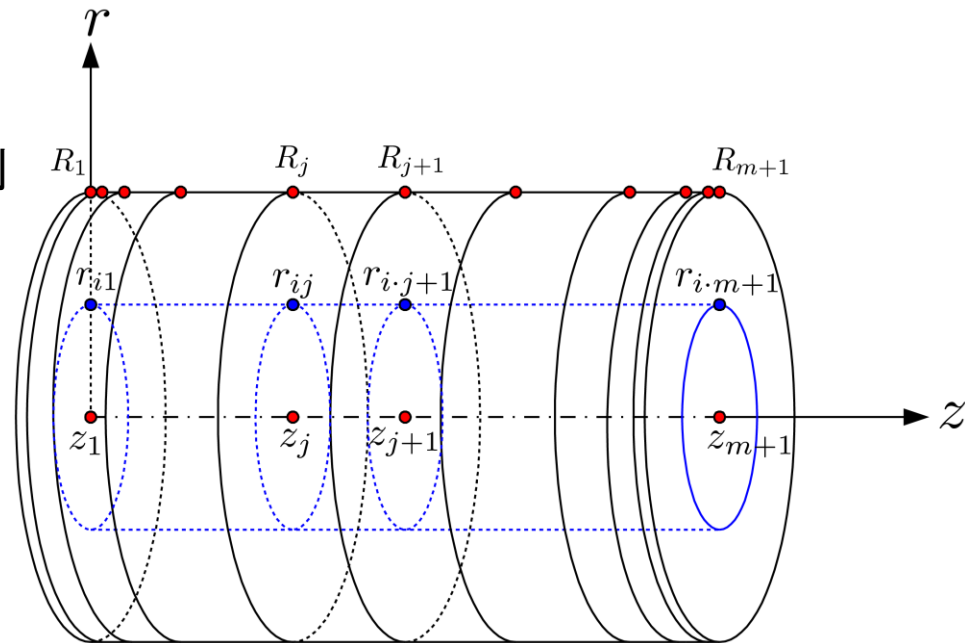


出来るだけ解析的に短バンチビームのエミッタンスを求めたい

# エンヴェロープ方程式でバンチ形状を計算する

## モデル

バンチを  $n \times m$  分割



- 空間電荷による電磁場は、各点電荷からの電磁場ではなく各バンチスライスからの電磁場を計算
- バンチスライスは、歪んではならない。

## 計算手法

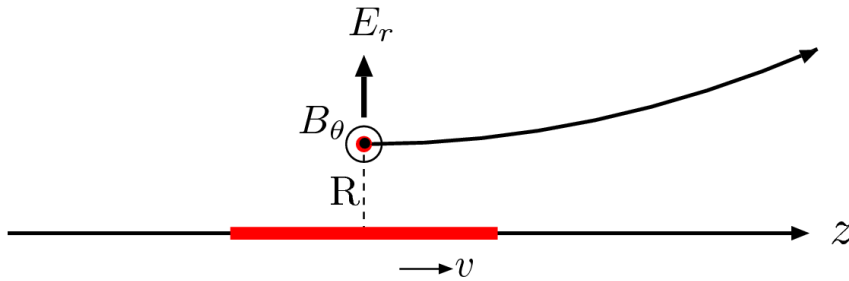
数値計算ソフト octave で各粒子のエンヴェロープを微分方程式として連立して解く

<http://www.octave.org>

## 外部電磁場

octaveはプログラム可能であり、任意の外部電磁場の取り込みが可能

## Transverse 方向



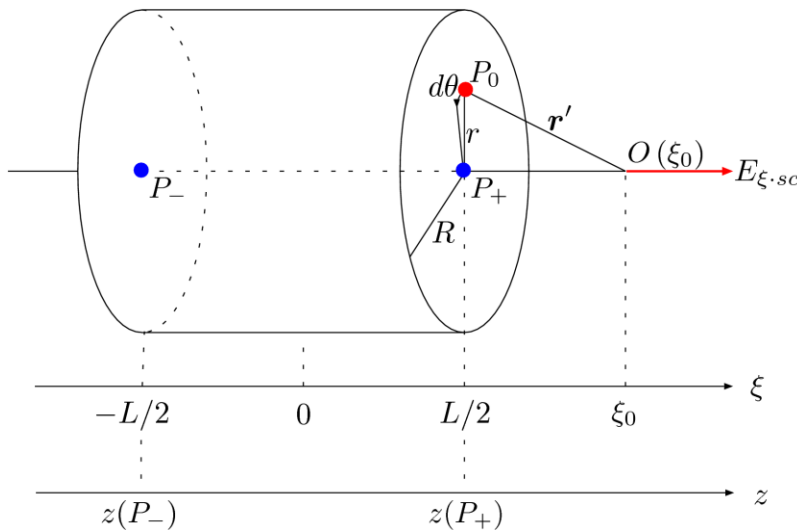
$$\frac{d^2 R}{ds^2} = \frac{eI}{2\pi\epsilon_0 m_0 c^3 \gamma^3 \beta^3 R}$$

Lawson's envelope equation

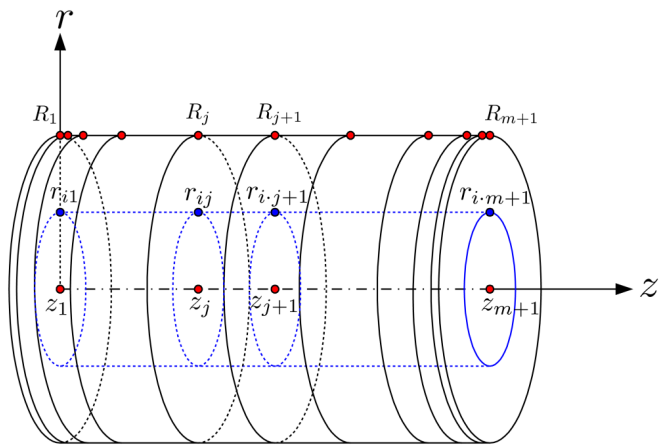


- ・短バンチビームにも適用できるように改良
- ・r方向ビームサイズを持ったバンチからの電磁場を計算できるように補正を適用 (ビームエネルギーに依らず補正が可能)

## Longitudinal 方向



- ・円柱を体積積分することにより電磁場を計算



$$\frac{d^2 R_j}{dt^2} = -\frac{e}{\gamma_j m_0} \left( \frac{E_{r.sc}}{\gamma_j^2} - E_r + \beta_j c B_\theta + \frac{\beta_j}{c} \cdot \frac{dR_j}{dt} E_z \right)$$

**For transverse direction**

$$\frac{d^2 r_{ij}}{dt^2} = -\frac{e}{\gamma_j m_0} \left( \frac{E_{r.sc}}{\gamma_j^2} - E_r + \beta_j c B_\theta + \frac{\beta_j}{c} \cdot \frac{dr_{ij}}{dt} E_z \right)$$

**For transverse direction**

$$\frac{d^2 z_j}{dt^2} = -\frac{e}{\gamma_j^3 m_0} (E_{\xi.sc} + E_z)$$

**For longitudinal direction**

$$\frac{d\beta_j}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d^2 z_j}{dt^2}$$

**For energy**

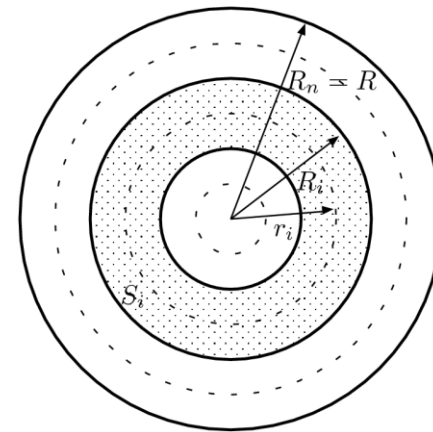
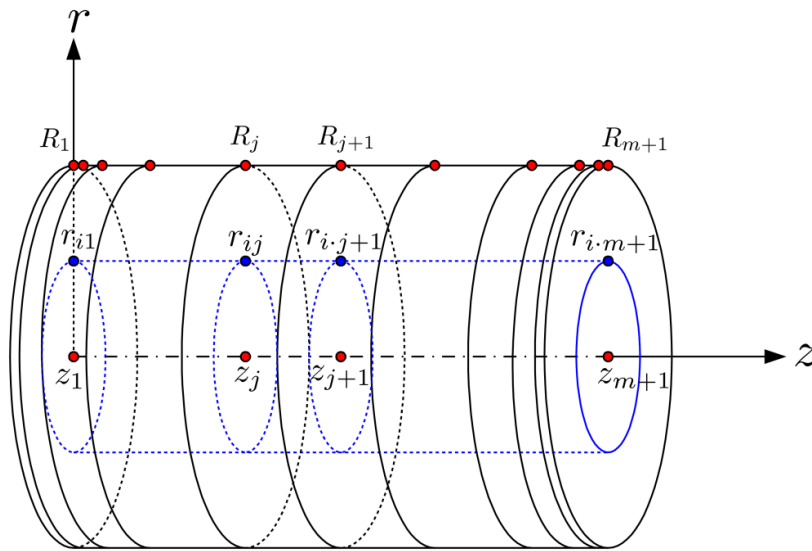
$$(i = 1, \dots, n)(j = 1, \dots, m + 1)$$

$$\begin{cases} E_{r.sc} & : \text{sum of transverse space charge fields from each longitudinal slice.} \\ E_{\xi.sc} & : \text{sum of longitudinal space charge fields from each longitudinal slice.} \\ E_r \quad \text{and} \quad E_\theta & : \text{External fields such as rf cavity fields.} \end{cases}$$

**Ref. A. Mizuno et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams 15, 064201(2012)**

# Transverse Emittance 等、各種パラメータの計算手法

$$\epsilon_x \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle - \langle r \cdot r' \rangle^2}$$



$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^n W_i \cdot A_i$$

$$W_i = \frac{S_i}{(\pi R^2)} = \frac{(2i - 1)}{n^2}$$



## 2. フリースペースでのビームダイナミクス計算

# フリースペース中でのトラッキング #1

$$n = m = 10$$

Initial Parameters:

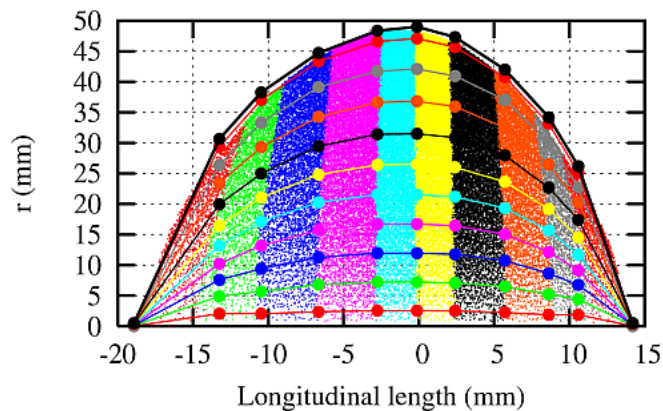
バンチサイズ :  $\Phi 1.0\text{mm}$

バンチ幅 :  $10\text{ps}$

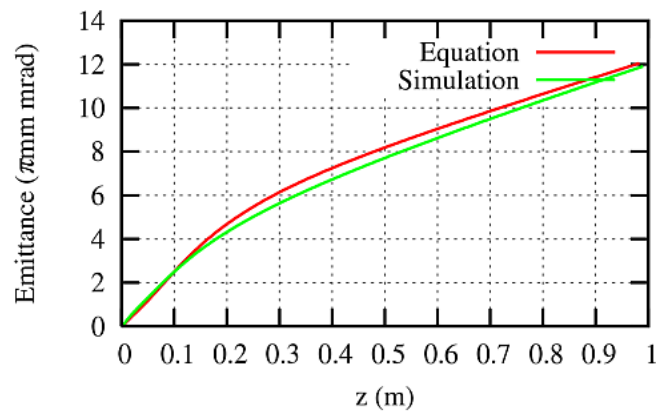
電荷量 :  $1\text{nC}$

バンチエネルギー :  $1\text{MeV}$

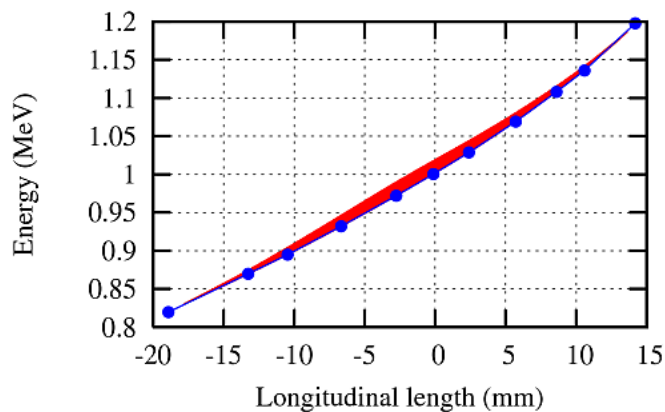
1.0 nC, 1.0 MeV,  $\phi 1.0\text{mm}$ , 10 ps,  
Free Space with No image



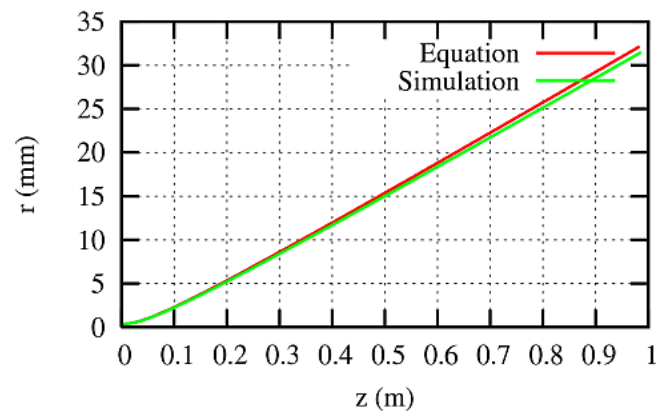
1.0 nC, 1.0 MeV,  $\phi 1.0\text{mm}$ , 10 ps,  
Free Space with No image



1.0 nC, 1.0 MeV,  $\phi 1.0\text{mm}$ , 10 ps,  
Free Space with No image



1.0 nC, 1.0 MeV,  $\phi 1.0\text{mm}$ , 10 ps,  
Free Space with No image

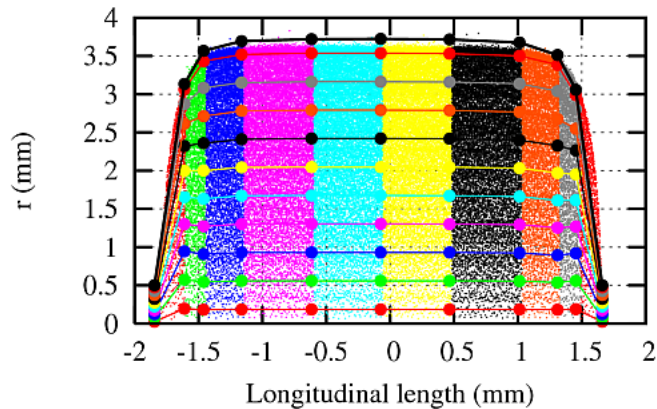


# フリースペース中でのトラッキング #2

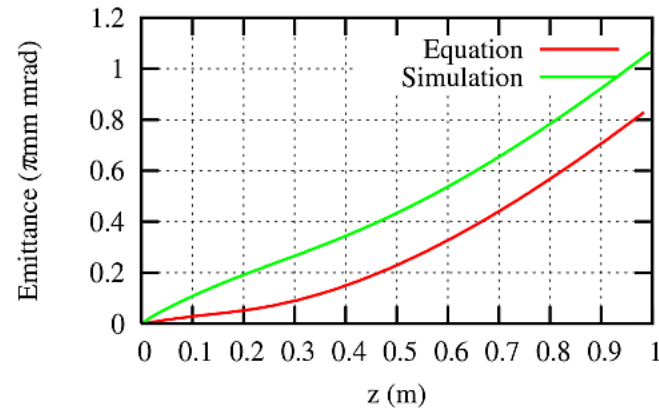
Initial Parameters:

- バンチサイズ :  $\Phi 1.0\text{mm}$
- バンチ幅 :  $10\text{ ps}$
- 電荷量 :  $1\text{ nC}$
- バンチエネルギー :  $6\text{ MeV}$

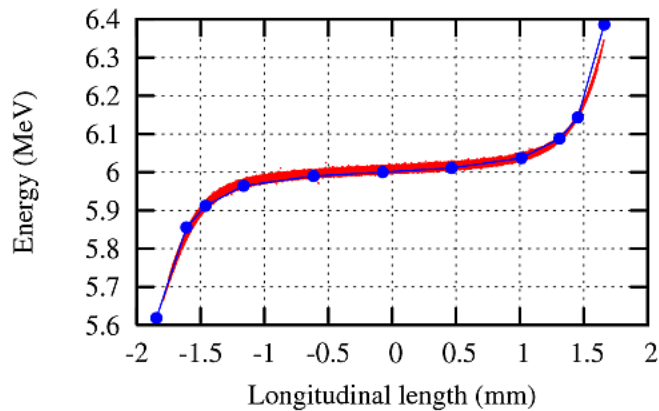
1.0 nC, 6.0 MeV,  $\phi 1.0\text{ mm}$ , 10 ps,  
Free Space with No image



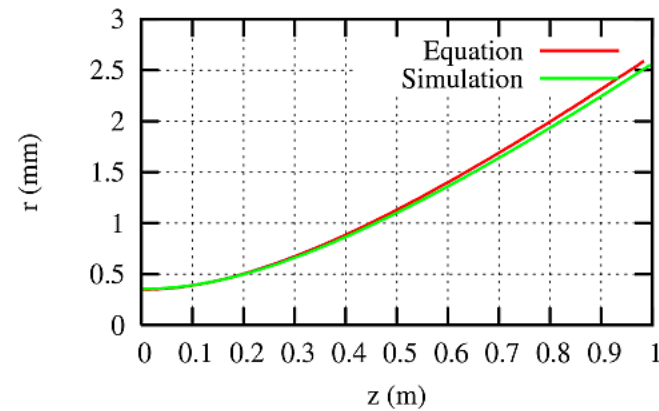
1.0 nC, 6.0 MeV,  $\phi 1.0\text{ mm}$ , 10 ps,  
Free Space with No image



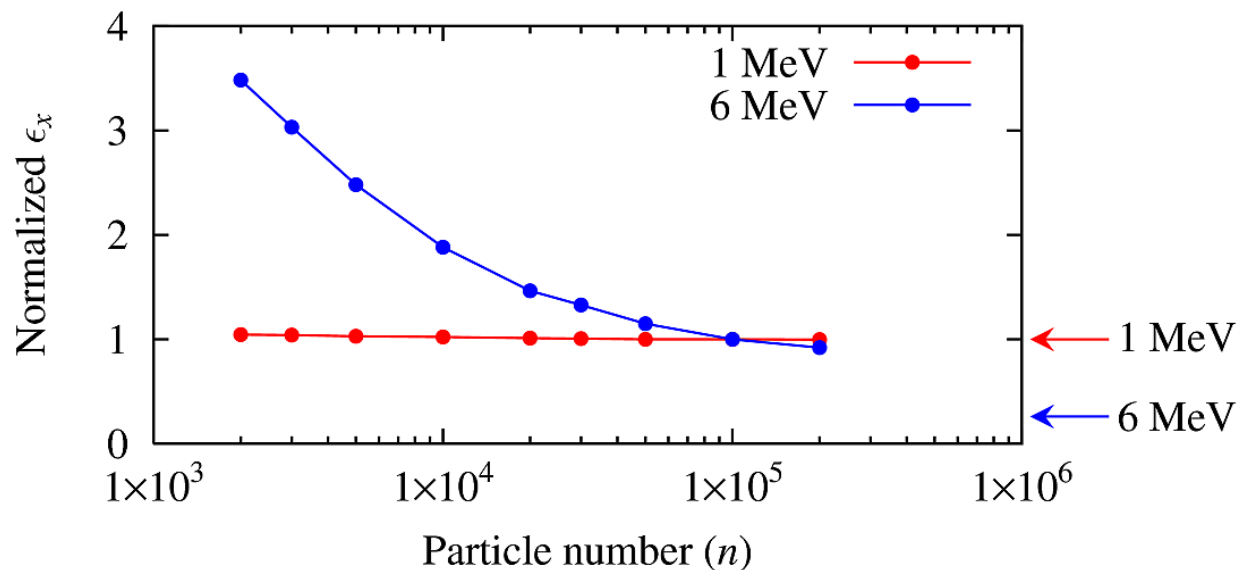
1.0 nC, 6.0 MeV,  $\phi 1.0\text{ mm}$ , 10 ps,  
Free Space with No image



1.0 nC, 6.0 MeV,  $\phi 1.0\text{ mm}$ , 10 ps,  
Free Space with No image



## エミッタンスの計算精度

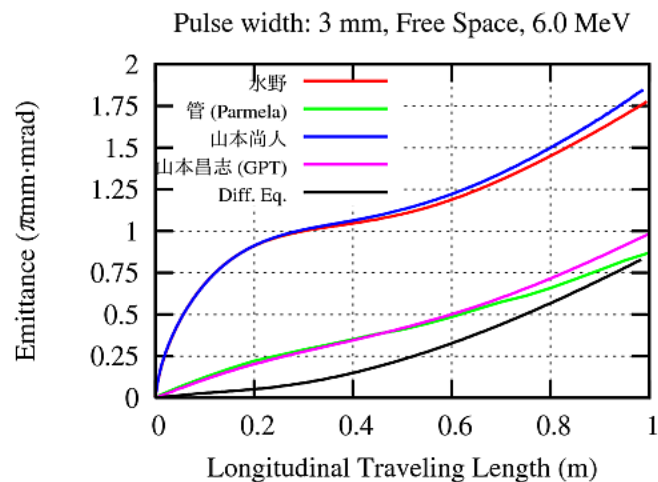
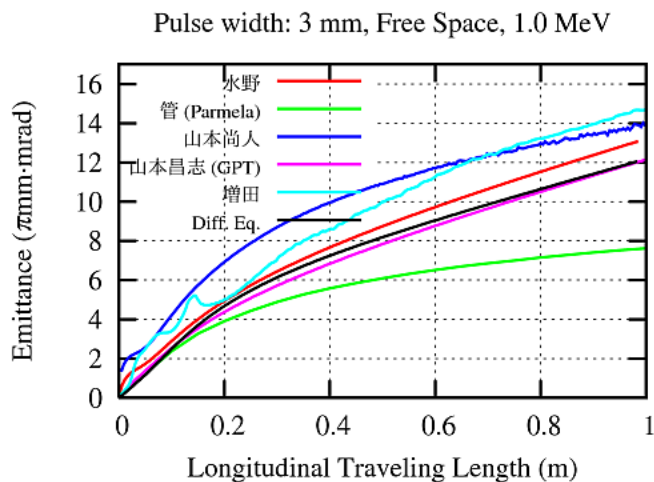
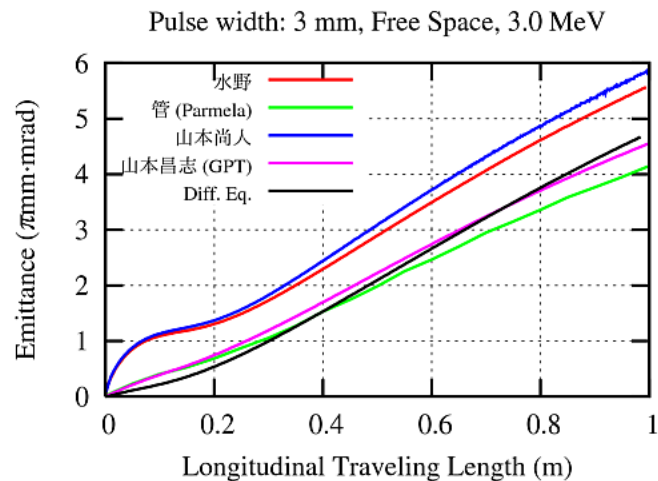
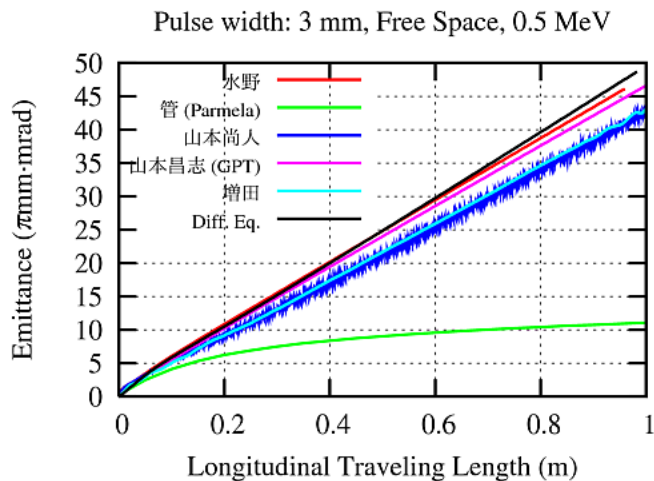


## 計算速度

- 水野の粒子シミュレーションコード:  $n=2 \times 10^5$
- Multiple Beam Envelop Equations

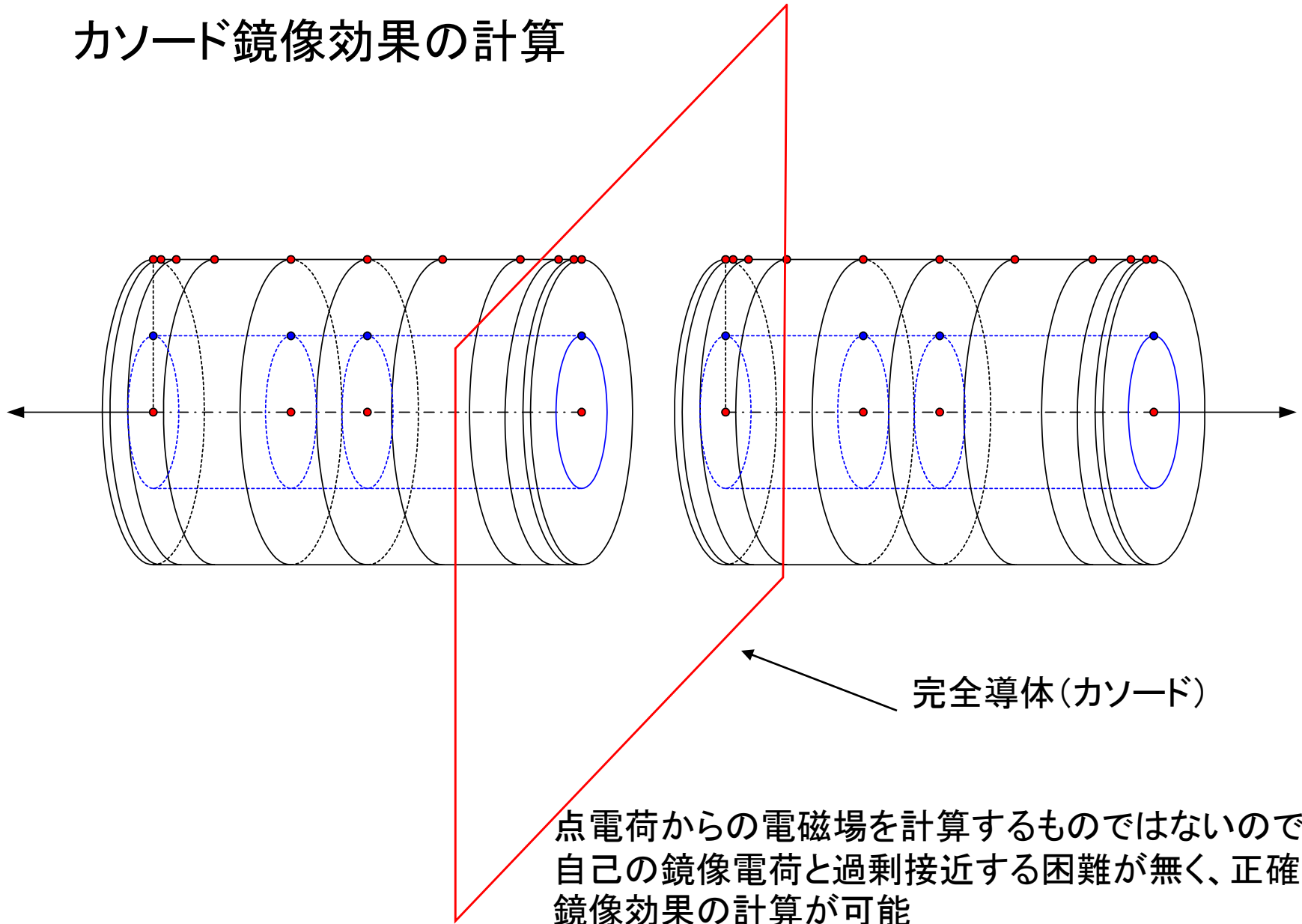
1週間のオーダー  
1分のオーダー  
by Xeon W5590 3.33 GHz

# 各シミュレーションコードとの比較

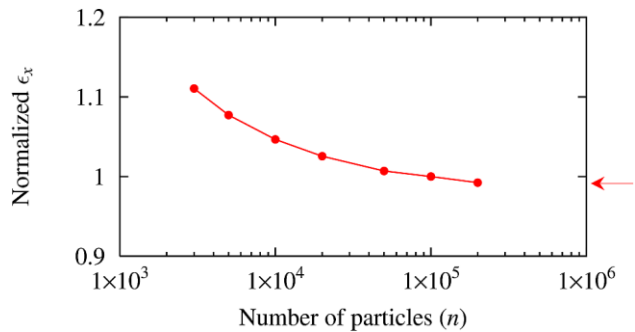


### 3. RF電子銃空洞内でのビームダイナミクス計算

# カソード鏡像効果の計算



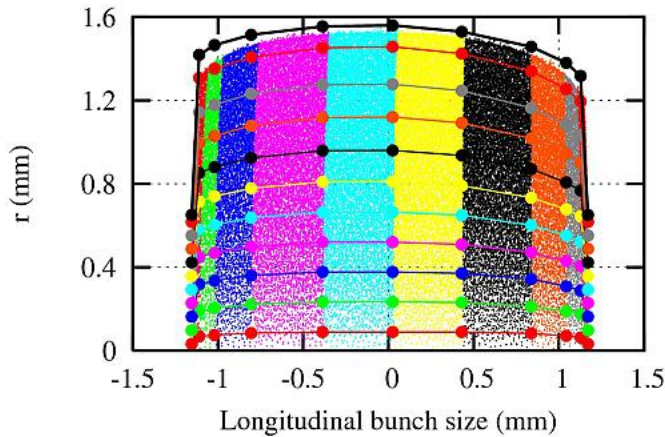
# BNL cavity 出口までのトラッキング #1



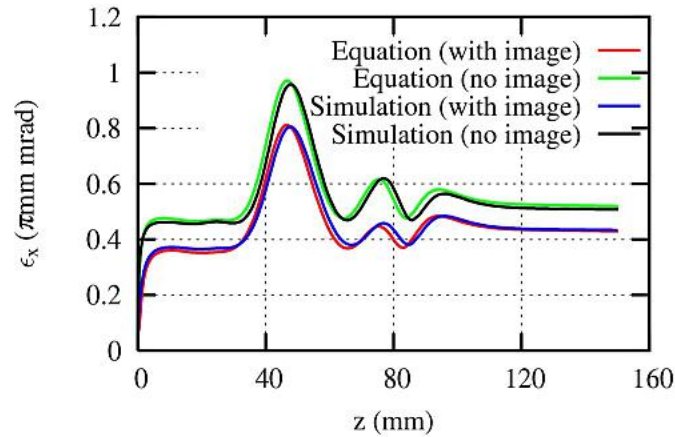
Initial Parameters:

- レーザースポットサイズ :  $\Phi 1.3\text{mm}$
- レーザー幅 : 10 ps
- 電荷量 : 0.1 nC
- エネルギー@cavity exit : 5.75 MeV

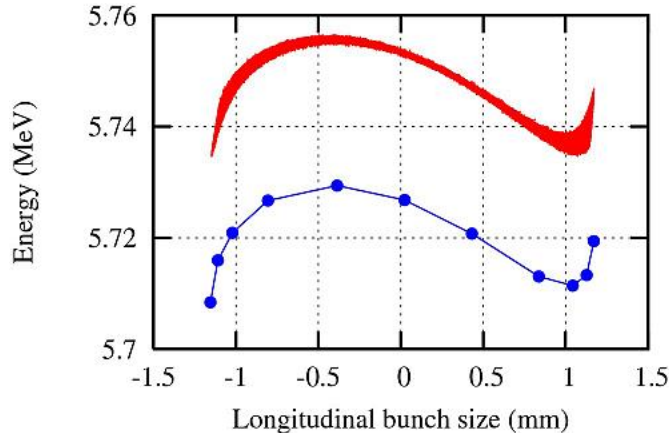
0.1 nC, Calculation for BNL cavity



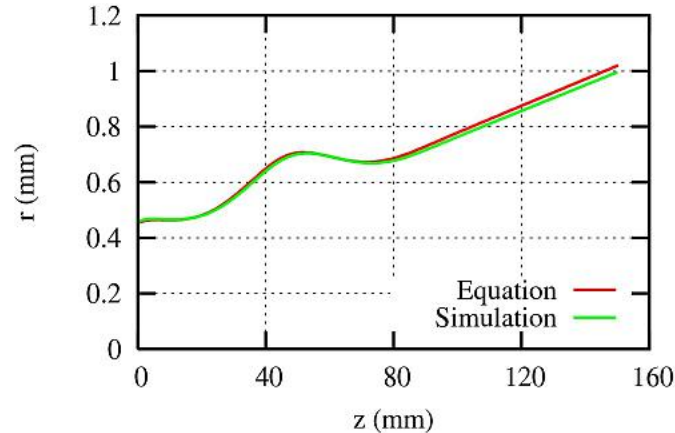
0.1 nC, Calculation for BNL cavity



0.1 nC, Calculation for BNL cavity



0.1 nC, Calculation for BNL cavity



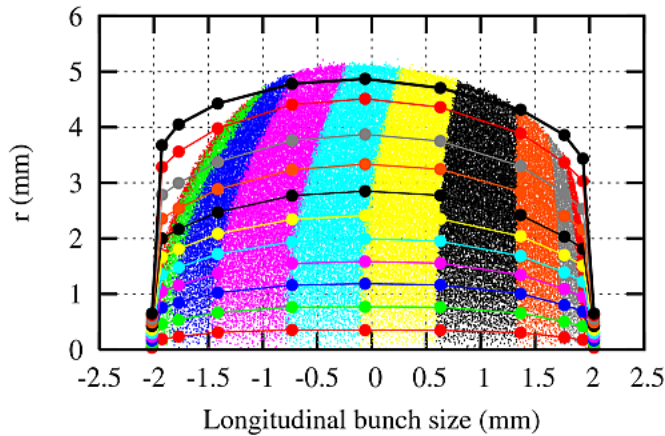


# BNL cavity 出口までのトラッキング #2

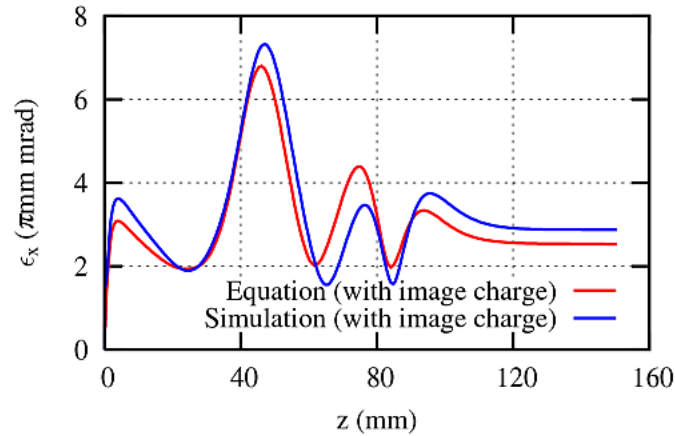
Initial Parameters:

レーザスポットサイズ :  $\Phi 1.3\text{mm}$   
 レーザー幅 : 10 ps  
 電荷量 : 1.0 nC  
 エネルギー@cavity exit : 5.75 MeV

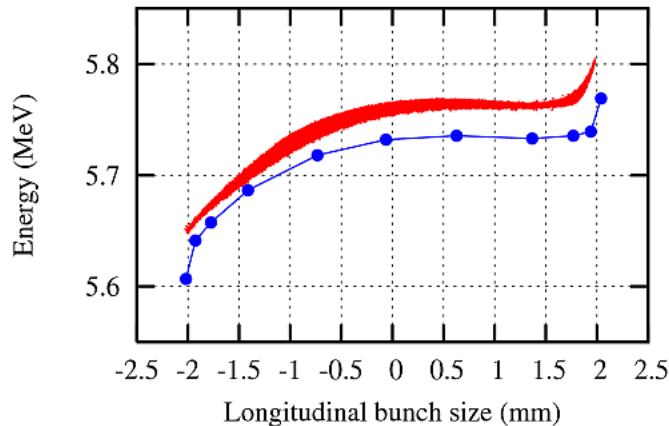
1.0 nC, Calculation for BNL cavity



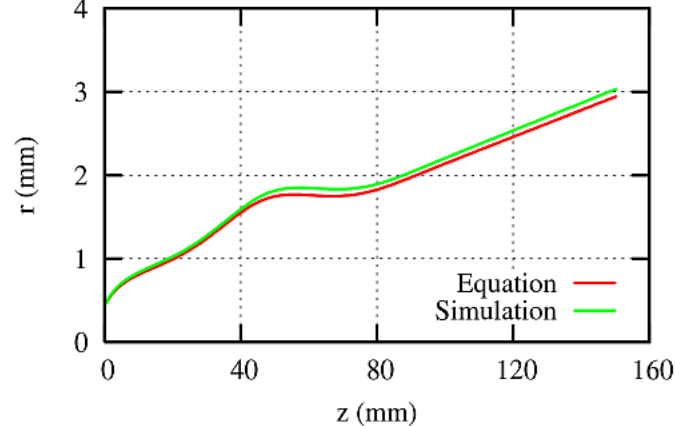
1.0 nC, Calculation for BNL cavity



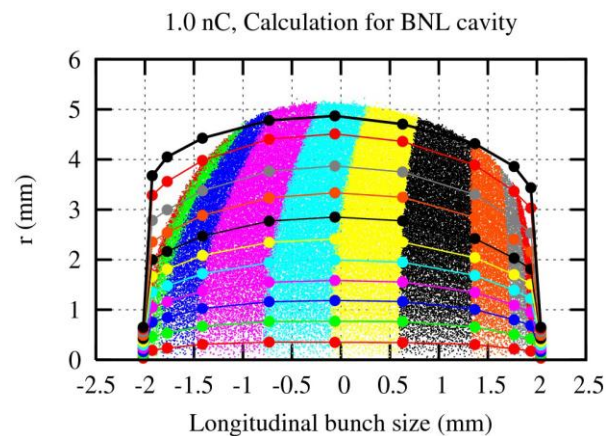
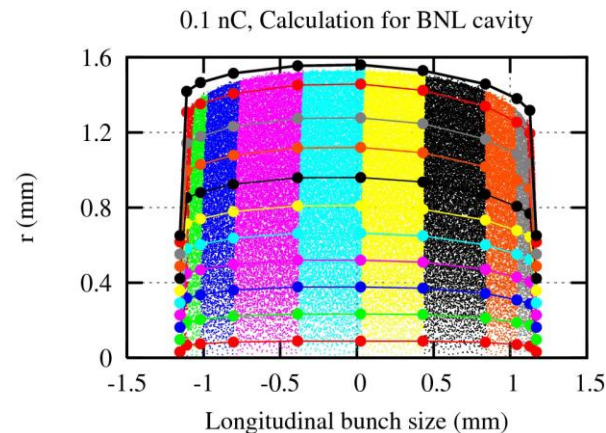
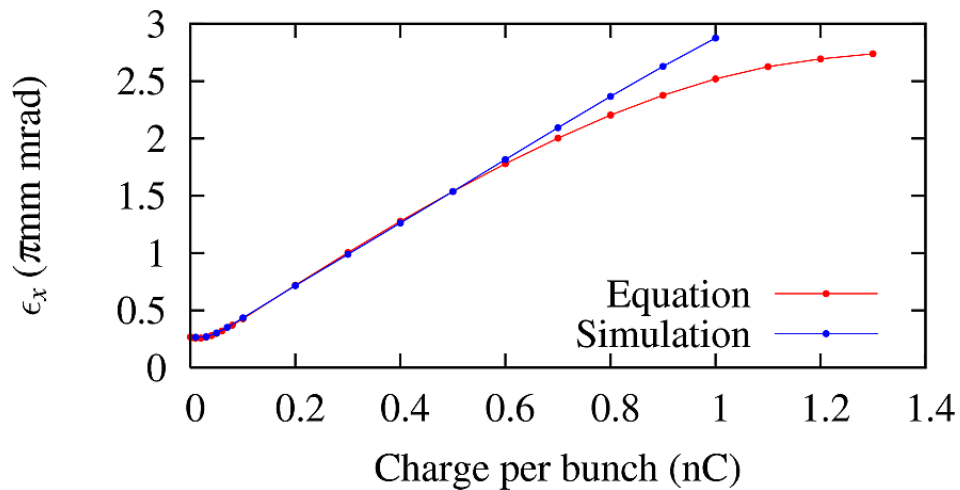
1.0 nC, Calculation for BNL cavity



1.0 nC, Calculation for BNL cavity



# エミッタンス精度と適用可能範囲



0.5 nC/bunch以上では、各スライスが歪むために正確な計算ができない

0.5 nC/bunchまで計算できれば、現状のXFEL施設の計算は十分に可能である

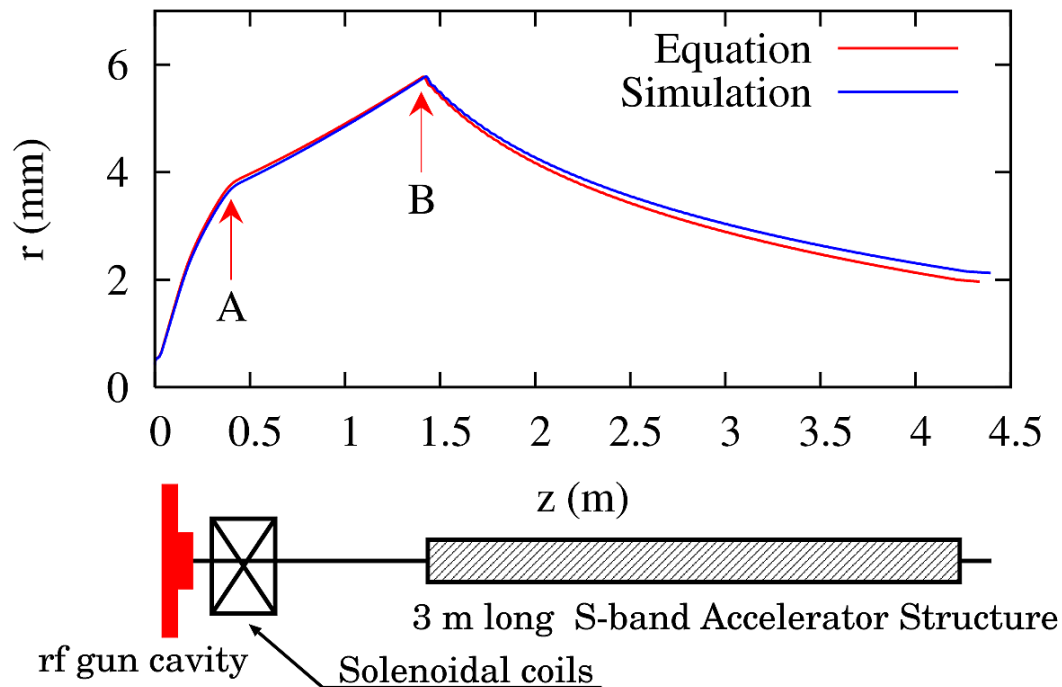
## 4. 実際のelectron injectorのビームダイナミクス計算

# 実際のinjectorへの適用 (⊖方向の微分方程式の追加)

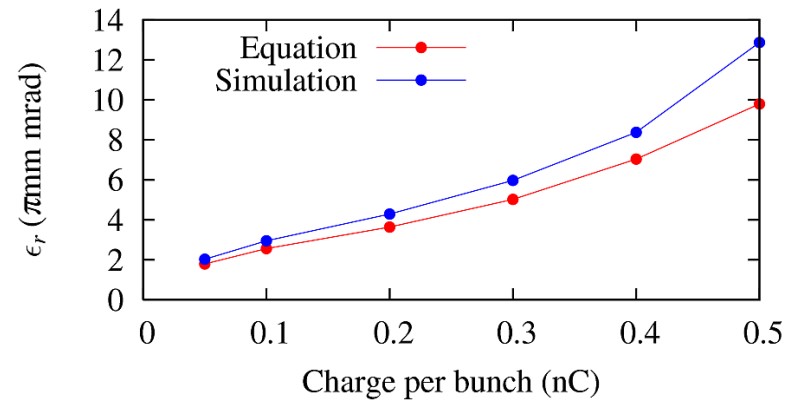
$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{e}{\gamma_j m_0 r} \left( \beta_j c B_r - \frac{dr}{dt} B_z + \frac{r\beta_j}{c} E_z \frac{d\Theta}{dt} \right) - \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\Theta}{dt}$$

Ref. A. Mizuno et al., 34th International FEL Conference, Nara, 2012, to be published

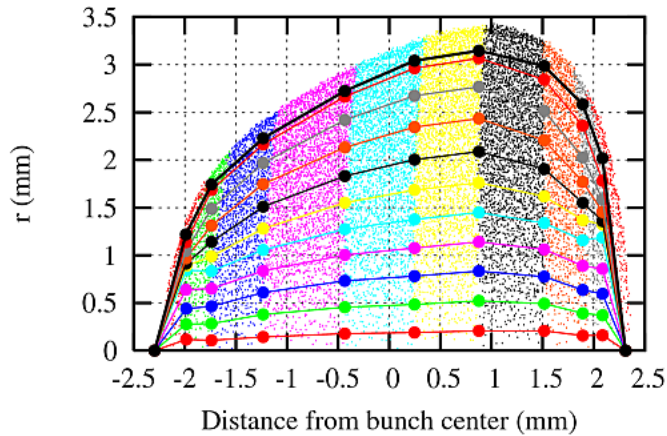
## SPring-8 RF gun injector の simulation



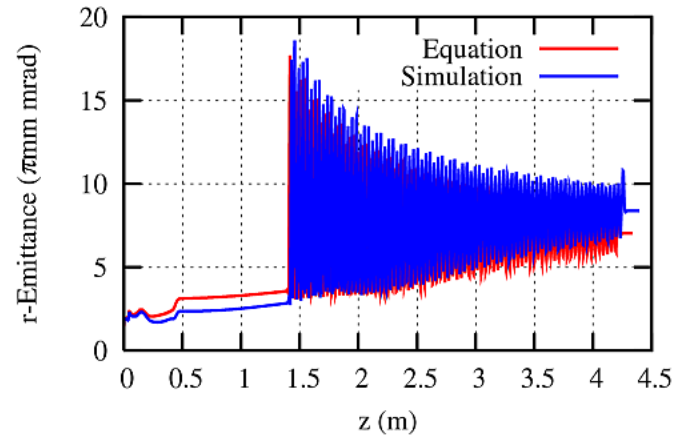
# ソレノイドコイルの収束力が弱い場合



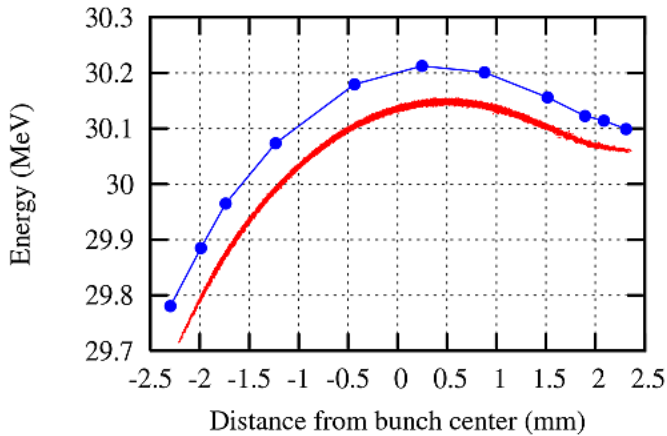
SP8, 0.4 nC, Solenoid + Acc, Solenoid 24A-16A



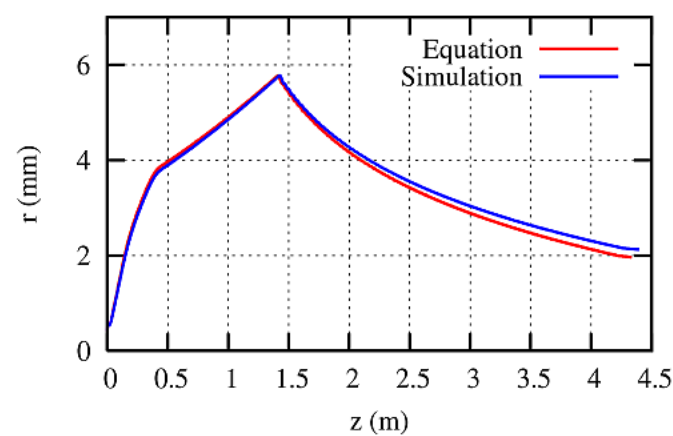
SP8, 0.4 nC, Solenoid + Acc, Solenoid 24A-16A



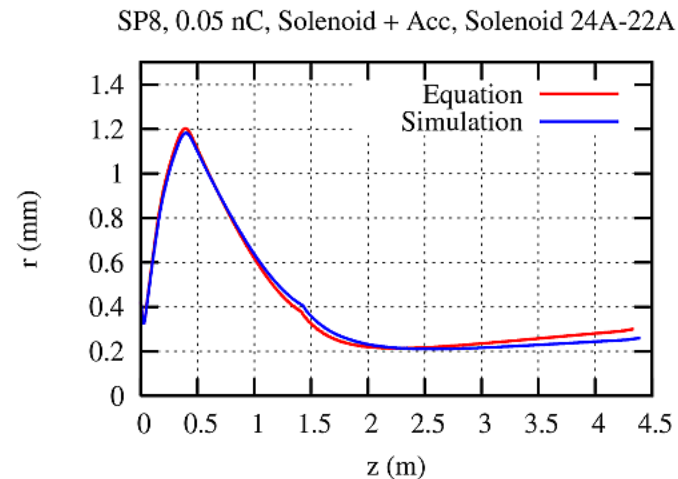
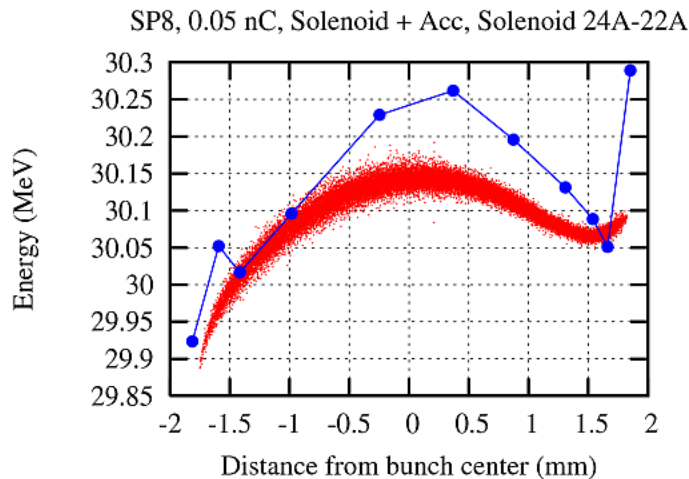
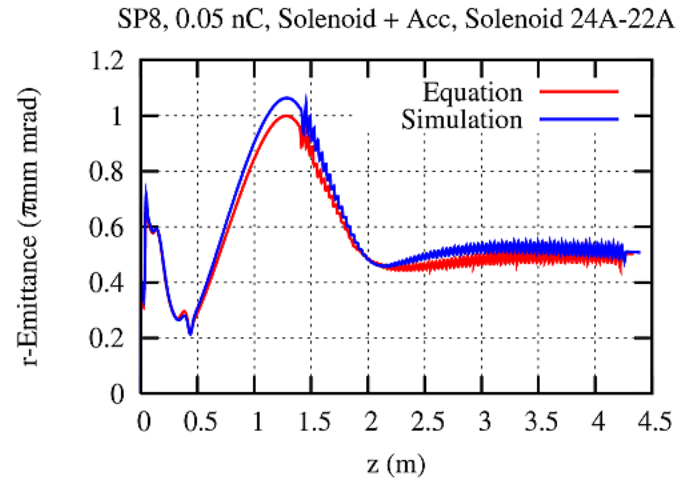
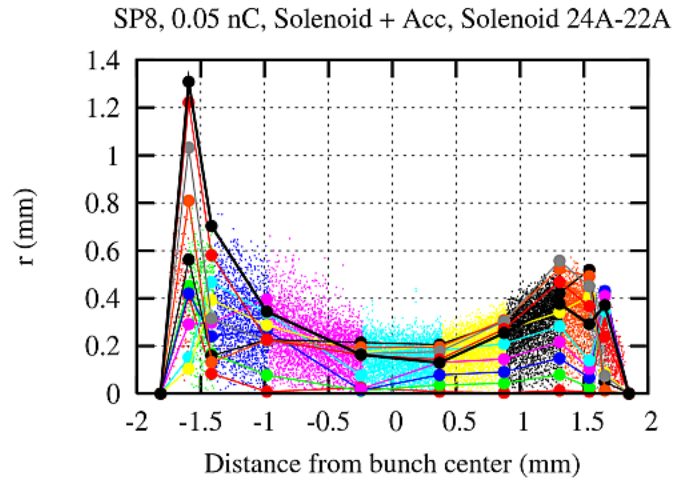
SP8, 0.4 nC, Solenoid + Acc, Solenoid 24A-16A



SP8, 0.4 nC, Solenoid + Acc, Solenoid 24A-16A



# ソレノイドコイルの収束力が強くオーバーフォーカスとなる場合



Transverse方向の分割点が入子になってしまい、正確にエミッタンスを計算できない

# まとめ

短バンチビームのダイナミクス解析のため、semi-analyticalな方法を用いたMultiple Beam Envelope Equationsを開発した。以下の特徴をもつ。

- バンチを $n \times m$ の格子状に分割し、その交点にある電子の軌跡をエンヴェロープ方程式で解く。
- 空間電荷効果は、各点電荷からではなく、バンチの各長手方向スライスからの電磁場を計算する。更に、ビームエネルギーに依らない電磁場補正法を用いているため、 $n=m=10$ 程度の分割で、粒子シミュレーションコードに比べて非常に短時間で、大変精度良くエミッタンスを算出できる。
- カソード鏡像効果も、精度良く計算可能である。
- 微分方程式を数値的に解いているため、様々な外部電磁場を取り込むことが可能である。
- 各スライスが歪んではいない。バンチの電荷量を大きくすると歪むので正確な計算ができない。ただし、BNL-typeのRF電子銃空胴の場合、実用的な電荷量である $0.5\text{nC/bunch}$ くらいまでは歪まない。
- 電子ビームをソレノイド等で集束し、オーバーフォーカスすると、径方向の分割点が入子になり、正常に計算できなくなる。

今後は、各スライスが歪む場合においても、精度良い計算ができるようなコードの開発を目指す。