

加速器勉強会（モニター）

2001年3月5日 佐々木茂樹

一応モニターについての勉強会ということになっているが、具体的な各モニターのハードウェアの話ではなくて、蓄積リングのどのような特性をはかっているのか？ということについて、述べることにする。とりあえず、いわゆる定点観測で測定しているものについて正確性はある程度犠牲になるかもしれないけれど、なるべく直感的なイメージがわくような説明をしたいと思う。定点観測で測定しているものを書き出し

ておくと：

- チューン
- ディスパージョン
- クロマティシティー
- COD

1 チューン

まず、チューンから。チューンとは固有振動数のことである。ただし、1秒あたりではなく1周回周期あたり。

1.1 おさらい：単振動

$$\frac{d^2u}{dt^2} + ku = 0 \quad (1)$$

変位 u に比例した大きさの力が働く場合の運動方程式。

$$u = a \exp(pt) \quad (2)$$

の形を仮定する。

$$p = \pm\sqrt{-k} \quad (3)$$

$$k > 0 \quad \text{なら} \quad k = \omega^2 \quad \text{として} \quad \exp(\pm i\omega t) \quad \text{の振動解} \quad (4)$$

$$k < 0 \quad \text{なら} \quad k = \gamma^2 \quad \text{として} \quad \exp(\pm \gamma t) \quad \text{の形の解} \quad (5)$$

ω : 固有振動数。 γ : 減衰の時定数、または発散の時定数。
 一般解は2つの独立な解の1次結合で表せる；

$$u(t) = A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t) \quad (6)$$

または

$$u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (7)$$

または

$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (8)$$

など。

1.2 ベータトロン振動

リング内の主要電磁石は：

- B → 軌道を丸くして閉じさせる
- Q → 回っている電子がどっかへ行ってしまわないよう閉じこめておく → レンズ
- S_x → B、Qから出てくる望ましくない性質の補正
- S_t → アライメント誤差などで生じた影響の補正

等である。ほかには入射関係の磁石、挿入光源などがある。

リング内の設計軌道のまわりの電子の運動の主要部分は4極電磁石で決まってくる。おおざっぱな言い方をすると、この4極電磁石によって規定される運動のことをベータトロン振動という。

で、そのベータトロン振動の運動方程式は

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + K(s)u = 0 \quad (9)$$

$$|K(s)| = \left| \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial B_y}{\partial x}(s) \right| \quad (10)$$

の形をしている。この式の導出は省略。磁場中の荷電粒子に働く力と四極電磁石の磁場を考慮し、電子の速度を光速として、電子軌道に沿った長さを s で表して、独立変数を時刻 t から s へ変換するがその変換とそれに伴う磁場中の力の効果の変換なんかを適当な近似のもとで計算するとでてくる（はず）。ここで、 u は x （水平）または y （鉛直）を代表してこう書いておく。 s は設計上の理想的な軌道に沿った長さ。設計

上の理想的な軌道: 電磁石の磁場に誤差がなく、設置も誤差なく行われたとしたら得られるであろう軌道。この軌道から少しでも水平または鉛直に変位を持った電子は四極電磁石中を通過するときに働く力によって引き戻されたり、より遠くに押し出されたりしながら周回する。その、運動の様子を記述したのが(9)式。また、

$$\frac{\partial B_y(s)}{\partial x} \quad (11)$$

は4極中の x 軸上または y 軸上での磁場勾配で、4極磁石ではこれが一定値となる。というか、これが一定となるような磁場成分を4極成分というか。

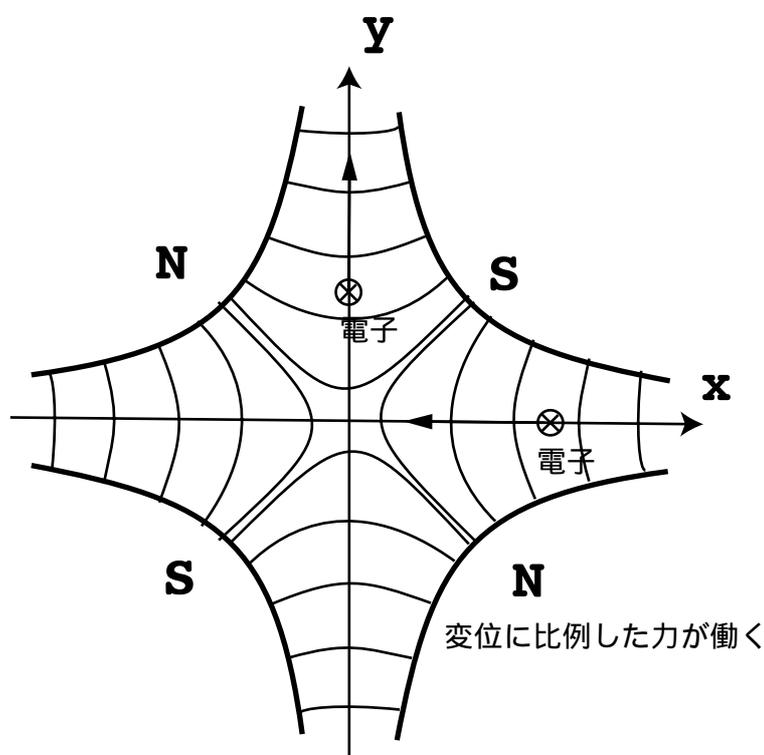


図 1: 四極電磁石の磁場

同じ場所 s で $K(s)$ の大きさは水平と鉛直で同じで、符号が逆になるので(9)式では絶対値だけ書いておいた。水平が収束だと鉛直は発散、鉛直が収束だと水平は発散の力が働く。

この(9)式をみると単振動の方程式に似ている⇒固有振動数がありそう。ただし、

方程式が軌道に沿った長さを独立変数としてかかれていますので、振動数の単位は長さあたりとなる？長さの単位を周長にとってやれば1周回あたりの振動の回数となる。

単振動の方程式との大きな違いは変位 u にかかる係数が s の関数となっていることである。だから単振動のような正弦波振動とはならない。けれども、 $K(s)$ がある条件を満たせば正弦波振動的な解が得られる。というか、正弦波振動な解となるような $K(s)$ になるように四極電磁石（およびその配置）の磁場が満たすべき条件を決め、そのような磁場を実現する四極電磁石（およびその配置）を作るとというのがリングの設計・建設のための条件のひとつ。

単振動の場合は $k > 0$ で振動解、 $k < 0$ では指数関数の解で初期条件次第では指数関数的に発散する。ベータトロン振動の場合は、場所により k の符号が変わることにより全体として、水平も鉛直も振動する解になるようにする。

ここで、 $\beta(s)$ 、 $\phi(s)$ という量を

$$\begin{aligned} u &= A\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0) \\ &= A(\beta(s))^{\frac{1}{2}} \cos(\phi(s) + \phi_0), \\ \phi(s) &= \int \frac{ds}{\beta(s)}, \text{ よって } \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\beta} = \beta^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\phi(s) = \int \frac{ds}{\beta(s)}, \text{ よって } \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\beta} = \beta^{-1} \quad (13)$$

と定義して導入する。

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= A \left(\frac{1}{2} \right) \beta^{-\frac{1}{2}} \beta' \cos(\phi + \phi_0) - A\beta^{\frac{1}{2}} \sin(\phi + \phi_0) \beta^{-1} \\ &= A \left(\frac{1}{2} \right) \beta^{-\frac{1}{2}} \beta' \cos(\phi + \phi_0) - A\beta^{-\frac{1}{2}} \sin(\phi + \phi_0) \\ &= A\beta^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2} \right) \beta' \cos(\phi + \phi_0) - \sin(\phi + \phi_0) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 s による微分を β' のように ' であらわす。

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} &= A \left(-\frac{1}{2} \right) \beta^{-\frac{3}{2}} \beta' \left[\left(\frac{1}{2} \right) \beta' \cos(\phi + \phi_0) - \sin(\phi + \phi_0) \right] + \\ &\quad A\beta^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) \left[\beta'' \cos(\phi + \phi_0) - \beta' \sin(\phi + \phi_0) \beta^{-1} \right] - \cos(\phi + \phi_0) \beta^{-1} \right\} \\ &= A\beta^{-\frac{3}{2}} \left[\left(-\frac{1}{4} \right) (\beta')^2 \cos(\phi + \phi_0) + \left(\frac{1}{2} \right) \beta' \sin(\phi + \phi_0) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{2} \right) \beta \beta'' \cos(\phi + \phi_0) - \left(\frac{1}{2} \right) \beta' \sin(\phi + \phi_0) - \cos(\phi + \phi_0) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A\beta^{\frac{1}{2}} \cos(\phi + \phi_0)\beta^{-2} \left[\left(-\frac{1}{4}\right) (\beta')^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \beta\beta'' - 1 \right] \\
&= u\beta^{-2} \left[\left(-\frac{1}{4}\right) (\beta')^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \beta\beta'' - 1 \right] \tag{15}
\end{aligned}$$

ところで、運動方程式から

$$\frac{d^2u}{ds^2} + K(s)u = 0 \tag{16}$$

だから

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u}{ds^2} + K(s)u &= u\beta^{-2} \left[\left(-\frac{1}{4}\right) (\beta')^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \beta\beta'' - 1 \right] + K(s)u \\
&= u\beta^{-2} \underbrace{\left[\left(-\frac{1}{4}\right) (\beta')^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \beta\beta'' - 1 + K(s)\beta^2 \right]}_{=0 \text{となる}\beta \text{が求まれば右辺は恒等的に}0} \tag{17}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\left(-\frac{1}{4}\right) (\beta')^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \beta\beta'' - 1 + K(s)\beta^2 = 0 \tag{18}$$

が導入した $\beta(s)$ という関数が満たすべき微分方程式。とりあえず(18)式を満たす β が求まったとしてさきに行く。

さらに ϕ の周長1周にわたる変化を $2\pi\nu$ と書くことにする。これは $\frac{1}{\beta}$ の周長の1周分にわたる定積分になる。 L は周長。

$$2\pi\nu = \int_0^L \frac{ds}{\beta} = \phi(L) - \phi(0) \tag{19}$$

さて

$$\eta \equiv \frac{u}{\sqrt{\beta}} \text{ と } \theta \equiv \frac{\phi}{\nu} = \frac{1}{\nu} \int \frac{ds}{\beta} \tag{20}$$

を導入してベータトロン振動の運動方程式を書き直してやる。

$$\frac{d}{d\theta} = \left(\frac{ds}{d\theta}\right) \frac{d}{ds} \tag{21}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\nu\beta}\right)} = \nu\beta, \text{ なので} \tag{22}$$

$$\frac{d}{d\theta} = (\nu\beta)\frac{d}{ds} \quad (23)$$

$$\eta = \frac{u}{\sqrt{\beta}} = A \cos(\phi + \phi_0) \quad (24)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -A \sin(\phi + \phi_0)\phi' = -A \sin(\phi + \phi_0)\beta^{-1} \quad (25)$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = (\nu\beta)[-1A \sin(\phi + \phi_0)\beta^{-1}] = -\nu A \sin(\phi + \phi_0) \quad (26)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} = (\nu\beta)\frac{d}{ds}\frac{d\eta}{d\theta} = (\nu\beta)\frac{d}{ds}[-\nu A \sin(\phi + \phi_0)] \quad (27)$$

$$= (\nu\beta)[- \nu A \cos(\phi + \phi_0)\phi'] = -(\nu)^2 A \cos(\phi + \phi_0) = -\nu^2 \eta \quad (28)$$

結局

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \nu^2\eta = 0 \quad (29)$$

となって、単振動の方程式に帰着する。

変位: $\eta = u/\sqrt{\beta(s)}$ で、独立変数は $\theta(s) = \phi(s)/\nu$ である。単振動の場合の正弦波振動解の形に書きあらわせば

$$\eta(\theta) = A \exp(\pm i\nu\theta) = A \exp(\pm i\phi) \quad (30)$$

$$\eta(\theta) = A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta) \quad (31)$$

$$= A \cos(\phi) + B \sin(\phi) \quad (32)$$

$$\eta(\theta) = A \cos(\nu\theta + \phi_0) = A \cos(\phi + \phi_0) \quad (33)$$

など。

1周回にわたる位相の変化は ϕ の1周回分の積分に等しくこれは $2\pi\nu$ となる。つまり、この単振動は1周回あたり ν 回振動することになる。この ν をベータトロン・チューンという。なお、この単振動の各 s における変位 $\eta(s)$ は実空間の変位 $u(s)$ を各点 s での $\sqrt{\beta(s)}$ で規格化したものとなっている。 η の振幅 A はどこでも同じであるため、 u に焼き直すと、 $\sqrt{\beta}$ に比例して振幅が大きくなる。この β がベータ関数と呼ばれているもので、エンベロップ関数などともいわれることがある (β ではなくて、 $\sqrt{\beta}$ をエンベロップといったかも?)

$K(s)$ は電磁石の磁場が決まれば決まる関数なので、リングのどこか場所を決めれば一意的に決まる関数。だから $K(s+L) = K(s)$ が成り立つ。

実は β を求めるときは周期解 ($\beta(s+L) = \beta(s)$ を満たす解) の条件のもとで(18)式をみたす β を求める。で、 β もリングのどこか場所を決めれば一意的に決まる関数である。

$u(s) = x(x)$ または $y(x)$ については リングのどこか場所を決めても周回ごとに異なった値をとりうる関数；初期条件 $u(s)|_{s=s_0}$, $u'(s)|_{s=s_0}$ の違いで無数の解があり得る。このうち周期解 ($u(s+L) = u(s)$ の条件を満たす解) を閉軌道 (Closed Orbit) という。

リングが理想てきにできていて、運転中に何の擾乱もないとすると、上記のベータトロン振動を観測することはできない(と思う)。個々の電子は上記の $u(s)$ のいろいろな初期条件に従った振動運動をしているが、通常観測可能なのは電子の集団の重心の運動とか、全体のプロファイルの形とかであって、一個一個の電子を観測できるわけではない。リングを周回している電子はものすごく数が多いので、集団として見たときは動きがないようにみえる(はずである)。

参考：周回している電子の個数：

電子一個の電荷 = $1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ 。この電子が1秒間に周回周波数回数だけリング上のある場所を通過するので、電子一個による蓄積電流値は $(1.6 \times 10^{-19}) \times (508.58 \times 10^6 / 2436) [\text{A}] = 3.3 \times 10^{-14} [\text{A}]$ だから、0.1A の蓄積電流のときには $10^{-1} / 3.3 \times 10^{-14} = 3 \times 10^{12}$ 個 の電子が周回していることになる。1 mA シングレバンチの場合は $10^{-1} / 3.3 \times 10^{-14} = 3 \times 10^{10}$ 個 が1このバンチに入っている。

1.3 ベータトロン振動の観測

さて、電子一個だけがリングを回っているとしてこの電子を見ることができると仮定したとき、このようなベータトロン振動の方程式にしたがって運動している電子をリングのある1点で観測したらどうみえるか？

例えば、ぐるっと1周してくる間に10回振動したのと11回振動したのの区別はつかない。

整数回の振動からの ” おつり ” の分だけが見ることができる。このおつりの分をチューンの小数部とかフラクショナル・チューンとかいう。

ところで、先ほど擾乱がない場合は振動の観測ができないといった。では、振動を観測するにはどうするか？擾乱がないとみえないのだから、擾乱を与えればよい。その擾乱はどのように与えるのがよいか？バンチ全体の電子が同じように振動するような擾乱を与えればよい。

例えば図2において、” 蹴り ” を与える点で周回ごとに外力を与えてやればよい。この場合に与える外力に対する条件とは？

図3 に $y = 0.75 \sin(2\pi(3 + 1/3)x)$ のグラフを示す。これは例えばチューンが3.333... の場合をイメージすることに対応する。このグラフで、横軸が整数値となるところが ” 蹴り ” を与える点だとする。そうすると、ここでみている分には3回と1/3だけ振動してきたということはわからなくて、3回の通過でもとの位相に戻ることだけがわかる。

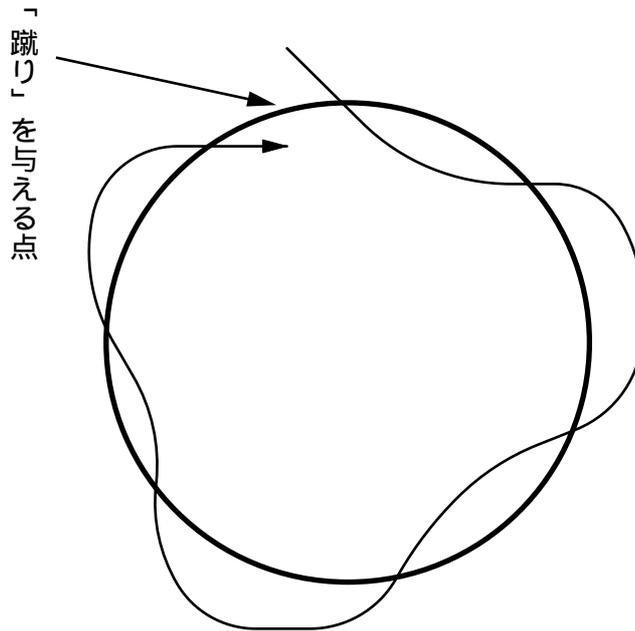


図 2: ベータトロン振動模式図

3回の通過で1回転となるばあいは小数部が $1/3$ の場合と $1-1/3=2/3$ の場合がある。このあたりの様子を図4に示す。図3, 4で丸印をつけたところが観測点または蹴りを与えるところ。結局リングの1箇所蹴りを与える、または観測する場合は、整数回の振動の分はわからなくて、小数部だけがわかる、しかも、 $0\sim 0.5$ と $1\sim 0.5$ は区別が付かない。整数部がいくつであるか、とか小数部が 0.5 よりも大きい小さいかについては、1点だけの観測以外の情報も含めて判断する必要がある。

蹴り飛ばす方は、整数部がいくつであるか、とか小数部が 0.5 よりも大きい小さいかとかの区別をする必要はない。

蹴りを与える点で周回ごとに外力を与える場合の外力に対する条件は、チューンの小数部 \times 周回周波数の周波数で周期的な力を与えてやる、ということになる。さらに、この周波数に周回周波数の整数倍を足した周波数も条件を満たす。式にかいてみると、 n を整数として、

$$f = f_{rev} \times (n \pm \nu_{frac}) \quad (34)$$

ただし、

- f : 与えるべき外力の周波数
- f_{rev} : 周回周波数

ν_{frac} : チューンの小数部

である。この周波数で外力を与えてやれば、ビームはバンチ全体でそろって振動をはじめ、やがて外力と振動の振幅の成長を妨げる要因と釣り合うところにきてほぼ一定の振幅となる（はずである）。成長を妨げる要因には、放射減衰とか、クロマティシティによるチューンの拡がりとか、アンプリチュード・ディペンデント・チューン・シフトとかの一応ある程度計算にのるものと、電磁石が作る磁場のふらつきでチューンが変わってしまうとかいう、計算にのりにくいものがある。クロマティシティについては後で触れる。

アンプリチュード・ディペンデント・チューン・シフトというのは、振動の振幅が大きくなるとチューンが小振幅のときの値からずれてくるというものである。ベータatron振動の方程式（9式）

$$\frac{d^2u}{ds^2} + K(s)u = 0$$

では $K(s)$ の値は s だけによっていて、変位 u には依存しない形になっている。ところが実際の磁石では変位の大きなところでは磁場の微分係数が、変位の小さなところと異なってくる。また、6極磁場の効果を考慮した方程式は、はじめから9式の係数が変位による形となっている。というか、 u の2次の項がついてくるようなかっこうになっている。いずれにしろ、振幅が大きくなると固有振動数が変わってくるので、一定の周波数で外力を与え続けても、振動の振幅がある程度成長したところで外力が固有振動数とずれてきて振幅の成長を妨げる効果となってくる。

放射減衰は放射光を出すことにより、振動のエネルギーを系の外に放出して振動の振幅が減衰していく現象である。ここではこれ以上の説明は省略する。

今までは、チューンの値がわかっているとして、バンチ全体を振らせて振動を観測できるようにするための条件のはなしであった。ところで、チューンの（小数部の）値がわからないとき、どうすればよいか？

少しずつ周波数をずらして、各周波数における振幅を観測し、振幅の最大値を与える周波数を求めればよい。それを周回周波数で割って得られる小数部がチューン（の小数部）となる。

小数部が0.5より大きいのか小さいのかは別の方法で判断することになるが、今回は省略。

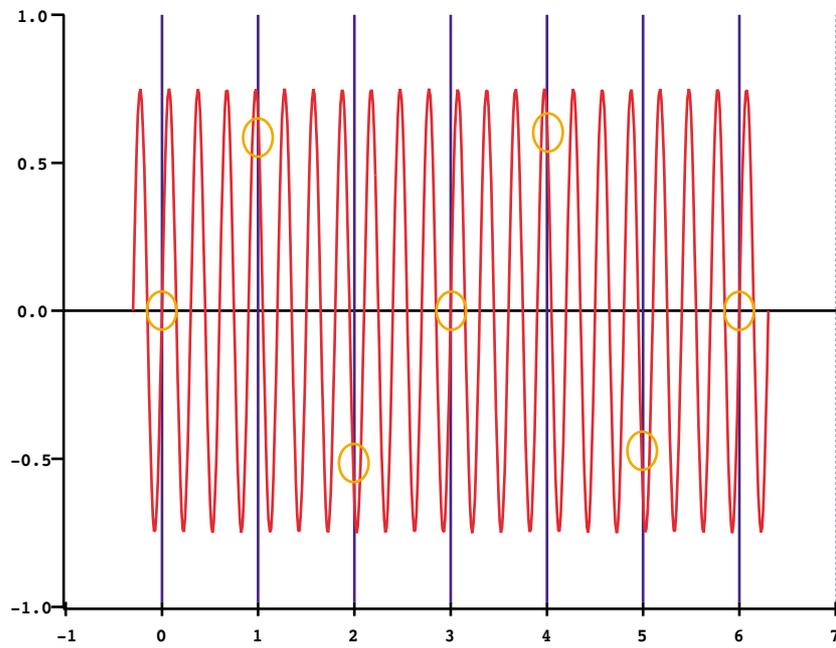


図 3: $y = 0.75 \sin(2\pi(3 + 1/3)x)$

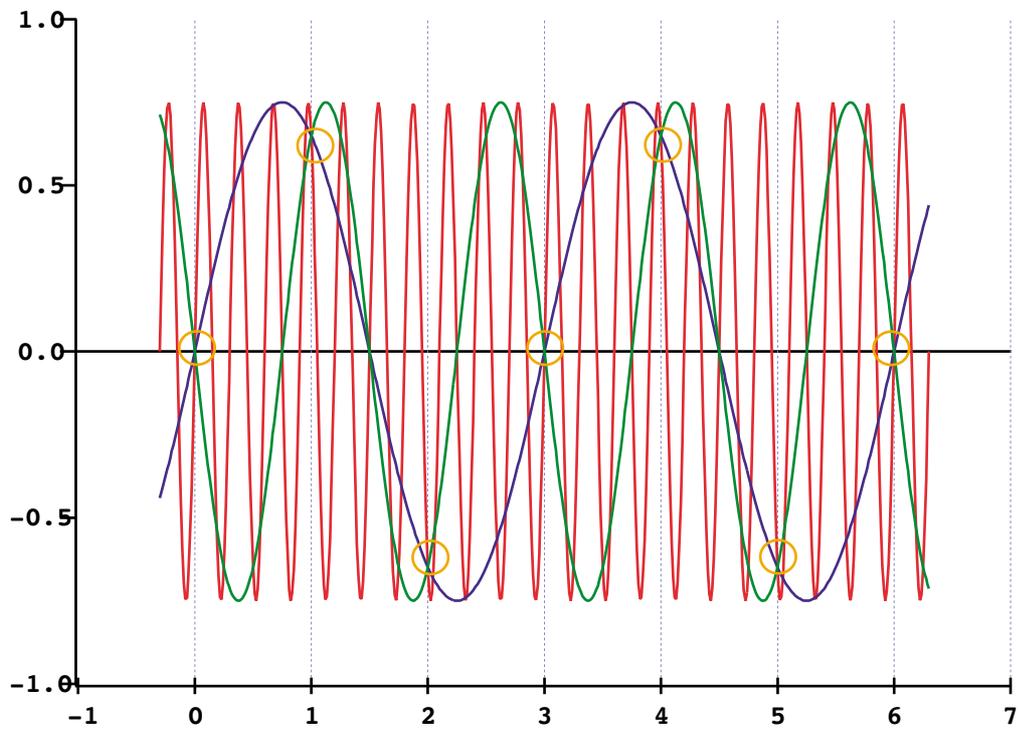


図 4: $y = 0.75 \sin(2\pi(1/3)x)$, $y = 0.75 \sin(2\pi(2/3)x - \pi)$ を追加

1.4 SPring-8 におけるチューン測定

図5にチューン測定の接続概念図を示す。ストリップラインなどのリング内の配置については図8を参照。当初”蹴り”(=シェーカー)用のストリップラインと観測用のストリップラインは同じ場所にある4本組の電極のうち1本ずつを使用していた。2000年5月の停止期間にストリップラインを増設したので、今は増設したストリップラインを観測用、以前からあるストリップラインをしシェーカーとして使っている。増設したストリップラインはフィードスルーのあたりを電力を供給することを前提とした作りをしていないので、観測専用として使用する。なお、ストリップラインの断面はシェーカー用も観測用も概略6図のようになっている。

図5について概要を説明する。まずSpectrum Analyzer(以下スペ・アナ)のトラッキングジェネレーター(TGout)から出力された信号とRF基準信号をミキサーに入れて周波数変換を行う。トラッキングジェネレーターというのはスペ・アナのディスプレイにでている周波数範囲の周波数の信号を測定周波数がスイープするのに同期して出力するというものである。チューン測定的时候はTGoutからは通常 $f_{RF} + \nu_{frac} \times f_{rev}$ ($= f_{rev} \times (2436 + \nu_{frac})$)のまわりの周波数が出力される。ミキサーからの出力はRF周波数とTGoutの周波数の差の周波数となるので、 $\nu_{frac} \times f_{rev}$ のまわりの周波数が出力されることになる。これを増幅してシェーカー用ストリップラインに供給する。

シェーカーの励起周波数がチューンの小数部($\times f_{rev}$)に一致したとき観測用ストリップラインのスペクトルにチューンの小数部($\times f_{rev}$)のサイドバンドが $f_{RF} + \nu_{frac} \times f_{rev}$ の周波数のところに観測される。このサイドバンドのピークをとってきてチューンの測定値としている。30 m 長直線部設置後のチューンの標準的な値は水平が40.15 鉛直が18.36である。このうちの小数部の0.15と0.36が定点測定的时候に測定されているものである。

なお、現在は観測専用ストリップラインの複数の電極からの信号を組み合わせて、水平・鉛直の観測の切り替えができるようにしている。

これにはRFハイブリッドジャンクションと呼ばれるRFコンポーネントのうち $0^\circ/180^\circ$ ハイブリッドというものをを用いる。これは2個の入力と2個の出力を持ち、2入力の差($1/2$)と和($1/2$)がそれぞれの出力で得られるというものである。ビームが鉛直に揺れているときは上下の電極の信号の差を、水平に揺れているときは左右の電極の信号の差をとれば、1電極の信号で揺れを観測するのよりも、感度を上げることができる。また、対角線の2電極の差をとってもよい。その場合は水平・鉛直ともに感度を持つことになる。

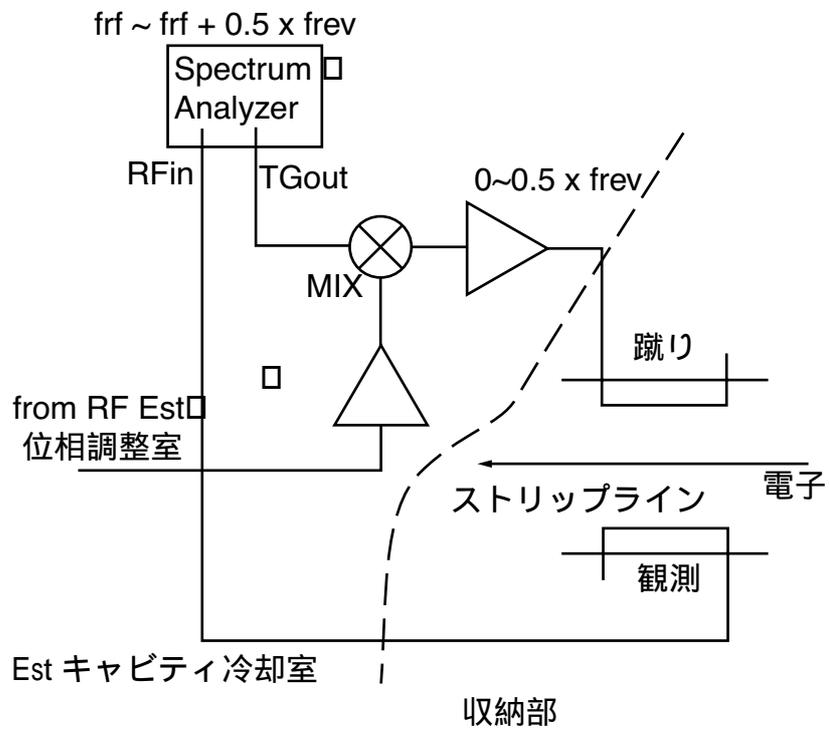


図 5: チューン測定 of 接続概念図

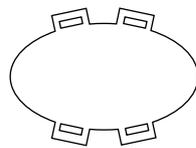


図 6: ストリップライン断面概念図

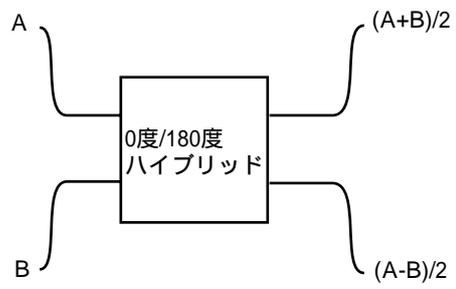


図 7: 0° /180° ハイブリッド

2 ディスパーション

ディスパーションとは、エネルギー（または運動量）の違いによる、各点 s での変位 $x(s)$ の違いのことである。

単位は長さの単位で、運動量の相対変化量が1のときの変位量で表す；つまり、8 GeV だったら16 GeV になるか、0 GeV になった場合の変位量。

実際にはそんなに大きく運動量が変わることはないので、係数の単位として、用いるだけのことである。

Spring-8蓄積リングの場合、最大のディスパーションを与える場所でのディスパーションが40 cm 程度である。例えばエネルギーが0.1% (= 0.001) 変化したとすると、その場所では軌道が $40 \text{ cm} \times 0.001 = 0.4 \text{ mm}$ 変化するということ。

チューンの説明のときのベータトロン振動の方程式では話を簡単にするために、説明を省いていたことがあった。（ただし、鉛直方向の運動に関しては特に変更はない。）水平方向の運動に関しては、偏向電磁石の効果を取り込んだ式をたてておく必要がある。で、どんな式になるかという

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \left(K(s) - \frac{1}{\rho(s)^2} \right) x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\delta p}{p_0} \quad (35)$$

これについても導出は省略。 ρ のついている部分が偏向電磁石の寄与分で、偏向電磁石内での力の働き方をといて入れればでてくる（はず）。Spring-8蓄積リングのように曲率半径 ρ が大きい場合、 $K(s)$ に比べて ρ を無視することができる。その場合は式36は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} - K(s)x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\delta p}{p_0} \quad (36)$$

としてよい。

ここで x を運動量による部分と運動量によらないベータトロン振動の分に分けることにする； $x = x_\beta + x_p$ と表してやる。

$$\frac{d^2(x_\beta + x_p)}{ds^2} + K(s)(x_\beta + x_p) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\delta p}{p_0} \quad (37)$$

これを以下の2つの式に書き直してやる。

$$\frac{d^2x_\beta}{ds^2} + K(s)x_\beta = 0 \quad (38)$$

$$\frac{d^2x_p}{ds^2} + K(s)x_p = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\delta p}{p_0} \quad (39)$$

$$(40)$$

で、 x_p の方は各点で運動量変化に比例した量となると思うことにする； $x_p(s) = \eta(s) \frac{\delta p}{p_0}$

$$\frac{dx_p(s)}{ds} = \eta(s)' \frac{\delta p}{p_0} \quad (41)$$

$$\frac{d^2x_p(s)}{ds^2} = \eta(s)'' \frac{\delta p}{p_0} \quad (42)$$

なので、

$$\frac{d^2x_p}{ds} - K(s)x_p = \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{p_0} \quad (43)$$

$$\eta(s)'' \frac{\delta p}{p_0} + K(s)\eta(s) \frac{\delta p}{p_0} = \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{p_0} \quad (44)$$

$$\eta(s)'' + K(s)\eta(s) = \frac{1}{\rho} \quad (45)$$

この方程式の周期解 ($\eta(s+L) = \eta(s)$ の境界条件をみたす解) をディスパージョン関数という。

2.1 ディスパージョンの測定

運動量 (エネルギー) 変化に伴う位置の変化の係数がディスパージョンだから、運動量 (エネルギー) を変化させて、軌道を測定してやればよい。では、運動量はどのように変えるのか？ RF 加速周波数を変化させることにより運動量を変える。

運動量の違いで変位 (軌道) が変化するわけだから、その軌道にそった積分、つまり周長はじつは運動量の関数となっている。運動量の変化と周長の変化が比例しているとして、この比例係数のことをモーメンタム・コンパクション・ファクターという。

$$\frac{\delta L}{L} = \alpha \frac{\delta p}{p_0} \quad (46)$$

これは無次元の量なので単位はない。

電子は光速度で走っているわけだから、周長が変わると1周回ってくる時間が変化する；周回周期 (周回周波数) が変わることになる。周長の変化の割合と周回周期 (周回周波数) の変化の割合は等しい； $\frac{\delta L}{L} = \frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta f_{rev}}{f_{rev}}$ (周波数と周期はどちらかが大きくなるともう一方は小さくなるので符号は逆となる)。周回周波数とRF 加速周波数は整数倍の関係にあるので、周回周波数が変わればRF 加速周波数も変わる。周回周波数とRF 加速周波数の比をハーモニック・ナンバー (h) という； $f_{RF} = hf_{rev}$ 。

逆に、RF 加速周波数を変えてやれば周回周期が変わり、運動量も変わる。その運動量の変化にともなって軌道も変化することになる。周波数を（何点か）変えてCOD 測定を行えばよい。

3 クロマティシティ

クロマチシティとは運動量の違いによるチューンの違いのことである。チューンの相対変化量と運動量の相対変化量が比例するとして、この比例係数のことである。

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \xi \frac{\delta p}{p_0} \quad (47)$$

これも無次元の量なので単位はない。

またベータトロン振動の式に戻ると、

$$\frac{d^2u}{ds^2} + K(s)u = 0 \quad (48)$$

$$|K(s)| = \left| \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial B_y}{\partial x}(s) \right| \quad (49)$$

となっていて、 $K(s)$ の表式の中に曲率半径 ρ に依存するファクターがあることがわかる。曲率半径は運動量に比例し磁場に反比例する。このことから、 $K(s)$ が運度量に依存しそれに伴いチューンが変化することが想像できる。

レンズのたとえでいうと、運動量がことなると焦点距離が異なったようにふるまうということである。 $K(s)$ は4極電磁石の効果を表す量で、4極電磁石のレンズ効果の焦点距離を反映するものである。可視光でいうところの色収差に対応する。

SPring-8 の場合は、4 極電磁石の収束力が強いので4 極電磁石だけを考慮した場合のクロマチシティはかなり大きなものとなる。4 極電磁石だけを考慮した場合のクロマチシティをナチュラル・クロマチシティといたりする。これがあまり大きいという不都合があって、電子が蓄積されなかつたりするので、補正をかけてクロマチシティを適当な値になるようにする。このとき用いるのが、クロマチシティ・コレクション6極電磁石である。

ディスパージョンのあるところでは軌道が運動量ごとに異なるので、ここに6極電磁石を設置すると、運動量の異なる電子は6極の軸から異なったところを通過する。6極電磁石は軸からの変位にしたがって収束力が変わるような働きをするので、適切な設定をしてやると、運動量の違いによる収束力の違いを補正することができる。

つまり、運動量の違いを軌道の違いに焼き直す。そののち、軌道の違いごとに収束力が異なるようなレンズを通過させる。というステップで補正していることになる。

3.1 クロマティシティの測定

運動量の違いによるチューンの違いがクロマティシティなのだから、運動量を何点か変化させて各点でチューンを測定すればよい。

エネルギーを変えるのはディスパージョンの測定のところでも述べたようにRF加速周波数を変えてやればよい。

4 COD

COD というのはClosed Orbit Distortion の頭文字をとったもので、”閉軌道のゆがみ”とでも訳せばいいのだろうか。

まず、閉軌道とは何か。またまたベータatron振動の式に戻って、

$$\frac{d^2u}{ds^2} + K(s)u = 0 \quad (50)$$

の解は初期条件 $u(s)$, $u(s)'$ の違いで無数にあるが、そのうち周期解 ($u(s+L) = u(s)$ をみたす解) を閉軌道という述べた。リングが理想的にできているとすると、この解というのは実はいたるところ $u(s) = 0$ という自明な解である。ところが、実際のリングは理想からずれてくるので、 $u(s) = 0$ が閉軌道とはならずながしかそこからずれたものとなる。このずれをCOD という。

4.1 CODの測定

リングのすべての点 s で変位 $u(s)$ が測定できればよいのだが、実際にはそうはいかない。で、リング上の必要な点にビームの位置をはかることができるようなもの (BPM: Beam Position Monitor; ビーム位置検出器) をおいてその点での位置の測定値をCOD といっている。

SPring-8蓄積リングでは1セルあたり6カ所、全周で288カ所のBPMを設置してCOD を測定している; 30 m長直線部の導入で一部使用しないBPMがでてきたので、現状では288カ所からは減っている。

4.2 BPM

BPM は電子ビームが真空チェンバーの内壁に誘起する電磁場の強さを測定することにより、ビームの位置を求めるような構成となっている。信号ピックアップであるボタン電極というものが真空チェンバーの内壁についている。1カ所のBPMにつき4個のピックアップが付いていて、水平・鉛直両方の位置が測定できるようになっている。

電子ビームが近づいた電極からの信号強度は強く、遠ざかった電極からの信号強度は弱くなるということからビーム位置を求める。

ビームの持つ周波数成分とか、ピックアップ感度の周波数依存性とかから f_{RF} の周波数成分だけを信号として観測するようにしている。(ビームの持つ周波数スペクトラムとか、ピックアップ感度なんかについての説明は省略。)

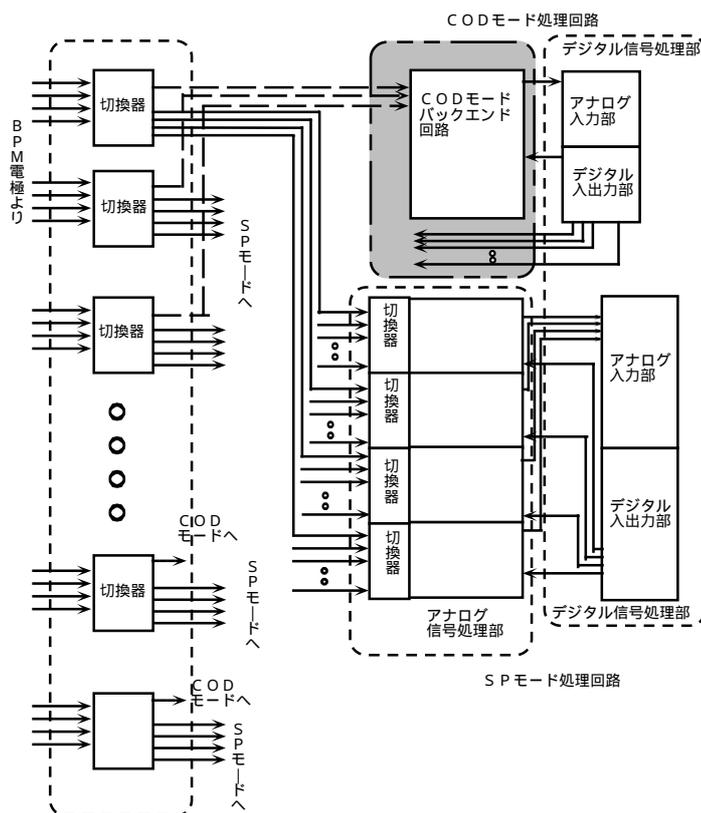


図 9: BPM信号処理回路概念図

ピックアップからの信号は同軸ケーブルでそのまま保守通路まで引き出されて信号処理回路のフロントエンド回路というのに入力されている。

フロントエンド回路の中で、ローパスフィルタ、バンドパスフィルタを通過して切り替えスイッチでシングルパス測定回路とCOD測定回路への切り替えを行う。COD測定の場合はさらに4電極を順に切り替える。フロントエンド回路の出力はバックエンドに接続されている。

1台のバックエンドには12台のフロントエンド(つまり2セル分のBPM)が接続

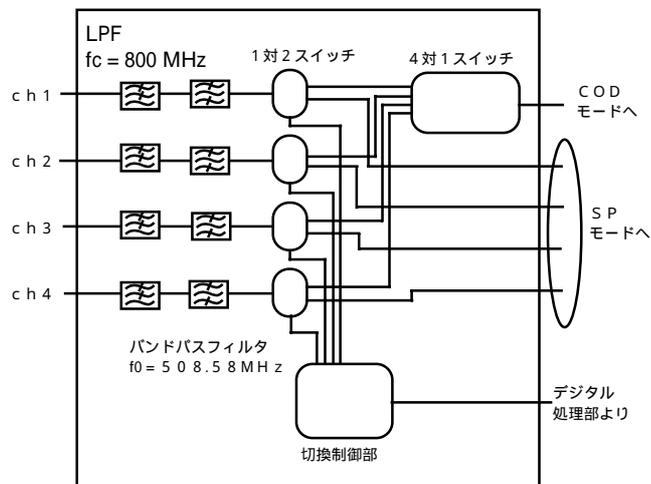


図 10: フロントエンド回路ブロックダイアグラム

されている。バックエンド12台のフロントエンドを順次切り替えながら、さらにフロントエンド内の電極切り替えスイッチを切り替えながら測定を行う。バックエンド構成は図11のとおりであるが、いわゆる高周波のスーパーヘテロダイン式AM検波回路となっている。ただし、モジュレーションがかかっているわけではないので、キャリアの強度測定を行っていることに相当する。4電極の信号強度比からポジションを求め、GUIで表示している。

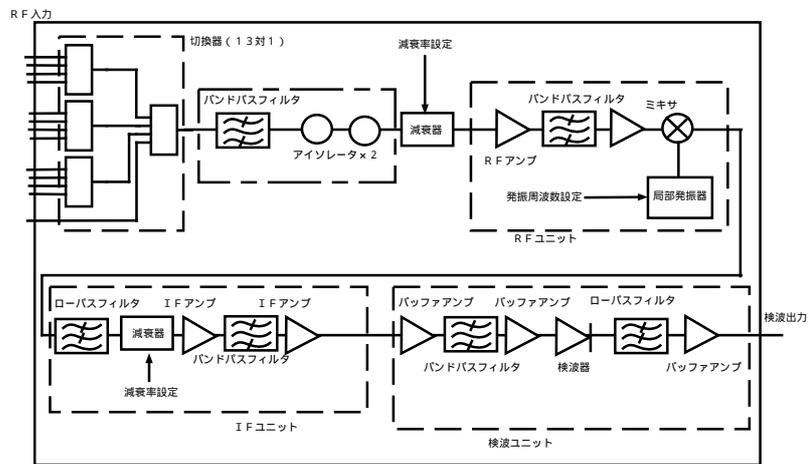


図 11: CODバックエンド回路ブロックダイアグラム

4.3 COD についての補足

ベータトロン振動の運動方程式で、右辺が0でない場合（非同次）の場合を考える。

$$\frac{d^2u}{ds^2} + K(s)u = F(s) \quad (51)$$

右辺の $F(s)$ が誤差磁場などの効果を表す。

さて、 $\beta(s)$ の満たす方程式および、先に導入した η, θ などから、

$$\left(-\frac{1}{4}\right)(\beta')^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\beta\beta'' - 1 + K(s)\beta^2 = 0 \quad (52)$$

$$\eta = \beta^{-\frac{1}{2}}u, \quad \theta = \frac{1}{\nu} \int \frac{ds}{\beta}, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\nu\beta}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \nu\beta \quad (53)$$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d}{ds} = \frac{1}{\nu\beta} \frac{d}{ds} = \nu\beta \frac{d}{ds} \quad (54)$$

である。 θ による微分をかきかだしていくと、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} &= \nu\beta \frac{d}{ds} \left[(\nu\beta) \frac{d}{ds} \right] = \nu^2\beta \frac{d}{ds} \left[\beta \frac{d}{ds} \right] \\ &= \nu^2\beta \left\{ \beta' \frac{d}{ds} + \beta \frac{d^2}{ds^2} \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{d\theta^2} &= \nu^2\beta \left\{ \beta' \frac{d}{ds} + \beta \frac{d^2}{ds^2} \right\} \eta \\ &= \nu^2\beta \left\{ \beta' \frac{d}{ds} + \beta \frac{d^2}{ds^2} \right\} (\beta^{-\frac{1}{2}}u) \end{aligned} \quad (56)$$

などとなる。

式56の s による微分の項を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\beta^{-\frac{1}{2}}u) &= -\frac{1}{2}\beta^{-\frac{3}{2}}\beta'u + \beta^{-\frac{1}{2}}u' \\ &= \beta^{-\frac{1}{2}} \left(u' - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta'u \right) \end{aligned} \quad (57)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}(\beta^{-\frac{1}{2}}u) = \frac{d}{ds} \left\{ \beta^{-\frac{1}{2}} \left(u' - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta'u \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\beta^{-\frac{3}{2}}\beta' \left(u' - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta'u \right) \\
&\quad + \beta^{-\frac{1}{2}} \left\{ u'' - \frac{1}{2} \left[-\beta^{-2}(\beta')^2 u + \beta^{-1}\beta''u + \beta^{-1}\beta'u' \right] \right\} \\
&= \beta^{-\frac{1}{2}} \left\{ u'' + u' \left[-\frac{1}{2}\beta^{-1}\beta' - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta' \right] \right. \\
&\quad \left. + u \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \beta^{-2}(\beta')^2 - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta'' \right] \right\} \\
&= \beta^{-\frac{1}{2}} \left\{ u'' - \beta^{-1}\beta'u' + u \left[\frac{3}{4}\beta^{-2}(\beta')^2 - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta'' \right] \right\} \quad (58)
\end{aligned}$$

これらを用いて θ の微分を計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\eta}{d\theta^2} &= \nu^2\beta \left\{ \beta' \left[\beta^{-\frac{1}{2}} \left(u' - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta'u \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \beta \left[\beta^{-\frac{1}{2}} \left(u'' - \beta^{-1}\beta'u' + u \left(\frac{3}{4}\beta^{-2}\beta'^2 - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta'' \right) \right) \right] \right\} \\
&= \nu^2\beta^{\frac{3}{2}} \left\{ u'' + u' \left[\beta^{-1}\beta' - \beta^{-1}\beta' \right] \right. \\
&\quad \left. + u \left[-\frac{1}{2}\beta^{-2}(\beta')^2 + \frac{3}{4}\beta^{-2}(\beta')^2 - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta'' \right] \right\} \\
&= \nu^2\beta^{\frac{3}{2}} \left\{ u'' + u \left[\frac{1}{4}\beta^{-2}(\beta')^2 - \frac{1}{2}\beta^{-1}\beta'' \right] \right\} \\
&= \nu^2\beta^{\frac{3}{2}} \left\{ u'' + u\beta^{-2} \underbrace{\left[\frac{1}{4}(\beta')^2 - \frac{1}{2}\beta\beta'' \right]}_{=K(s)\beta^2-1} \right\} \\
&= \nu^2\beta^{\frac{3}{2}} \left[\underbrace{u'' + K(s)u}_{=F(s)} - \beta^{-2}u \right] \\
&= \nu^2\beta^{\frac{3}{2}}F(s) - \nu^2\beta^{-\frac{1}{2}}u \\
&= \nu^2\beta^{\frac{3}{2}}F(s) - \nu^2\eta \quad (59)
\end{aligned}$$

単振動の形に変形した場合の式は、右辺に項があるとき

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \nu^2\eta = \nu^2\beta^{\frac{3}{2}}F(s) \quad (60)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \nu^2\eta = \nu^2f(\theta) \quad (61)$$

の形になる。

計算は省略するが、これらの方程式の周期解は

$$\eta(\theta) = \frac{\nu}{2 \sin(\pi\nu)} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(\sigma) \cos(\sigma - \pi - \theta) d\sigma \quad (62)$$

$$u(s) = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}(s)}{2 \sin(\pi\nu)} \int_s^{s+L} \left\{ \beta^{\frac{1}{2}}(\xi) \cos(\pi\nu - \phi(\xi) + \phi(s)) \right\} F(\xi) d\xi \quad (63)$$

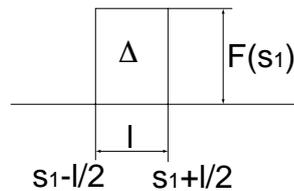
$$\phi(s) = \int \frac{ds}{\beta} \quad (64)$$

となる。

とくに、 $s = s_1$ に Δ のキックがあった場合の解は

$$u(s) = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}(s)\beta^{\frac{1}{2}}(s_1)}{2 \sin(\pi\nu)} \cos(\pi\nu + \phi(s) - \phi(s_1)) \Delta \quad (65)$$

$$\Delta = F(s_1)l \quad (66)$$



となる。これをみると、キックのある場所のベータ関数の大きさがきいていることがわかる。また、もともとベータがおおきいところへの影響も大きくなるが、キックの位置との位相差 $\phi(s) - \phi(s_1)$ にもよる。さらに、チューンが整数値に近いと $\sin(\pi\nu)$ が 0 に近づき COD が大きな値となる。

ディスページョンも同じ形の方程式をしているので、式63から求めることができる。